К. П. Горбачев

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ ПРОЧНОСТИ

ЛЕНИНГРАД „СУДОСТРОЕНИЕ"
1985

ББК 39.42–01
Г67
УДК 629.12.001.11:539.4

Рецензент канд. техн. наук С. В. Сочинский

Горбачев К. П.
Г67 Метод конечных элементов в расчетах прочности. – Л.: Судостроение, 1985. – 156 с., ил.
ИСБН

Монография посвящена методике расчета элементов конструкций, подкрепленных ребрами жесткости. Сформулирован численный алгоритм метода конечных элементов для расчета пластин и оболочек, подкрепленных ребрами жесткости. Приводится анализ сходимости решений в расчетах прочности и формулируются ее основные критерии. Рассматриваются схемы машинных алгоритмов формирования матриц жесткости и примеры расчетов с помощью полученных матриц. Даются рекомендации по практической реализации предлагаемого метода.

Книга рассчитана на научных, инженерно-технических работников, аспирантов и студентов, занимающихся вопросами теории расчета инженерных сооружений и реализации машинных алгоритмов.

Г $\dfrac{3605030000-024}{048(01)-85}$ 13–85 39.42–41

ПРЕДИСЛОВИЕ

Метод конечных элементов (МКЭ) представляет собой эффективный численный метод решения задач строительной механики и механики сплошных сред. Ему посвящено большое количество работ, в которых отражены различные теоретические и практические аспекты метода.

Наибольшее количество работ относится к вопросам расчета стержневых конструкций, гладких пластин и оболочек. Значительно менее популярны вопросы расчета подкрепленных пластин и оболочек, хотя такие элементы конструкций получили наибольшее распространение и расчет подкрепленных конструкций является важным прикладным направлением развития метода конечных элементов. То положение, что расчету подкрепленных пластин уделяется малое внимание, связано с необходимостью преодоления ряда трудностей, которые даже для гладких пластин и оболочек являются серьезными.

Основные трудности, стоящие на пути решения задач методом конечных элементов, связаны с необходимостью выполнения определенных требований сходимости. Одним из таких требований является необходимость соблюдения непрерывности искомых функций и их низших производных по границе смежных элементов. При расчете пластин и оболочек трудности получения совместных матриц жесткости элементов произвольной формы становятся настолько очевидными, что приходится прибегать к тем или иным вариационным формулировкам, которые для некоторых частных задач дают возможность обойти их, не решая общей задачи расчета конструкций, подкрепленных ребрами жесткости.

Развитие общего подхода, свободного от необходимости выполнения требований совместности по границам смежных элементов, становится более очевидным в связи с развитием систем автоматизированного проектирования конструкции, составляющей которых являются расчеты прочности с использованием метода конечных элементов.

Приведенные соображения предопределили цель и основное содержание настоящей работы. Сжатая форма изложения основных идей МКЭ обусловлена многочисленностью публикаций по этим вопросам. В работах О. Зенкевича, В. А. Постнова, Л. А. Розина [12, 29, 31] и многих других авторов с большой полнотой отражены многие вопросы теории метода конечных элементов, что побудило автора отказаться от изложения известного материала.

В настоящей работе излагается общая методика построения матриц жесткости на основе поэлементной аппроксимации составляющих исходного функционала, дающая возможность упростить машинный алгоритм формирования матриц жесткости. Наряду с основами теории рассматривается вариант машинной реализации предлагаемого алгоритма.

При решении краевых задач механики деформируемых сред наиболее широкое распространение получили вариационные методы, многие из которых подробно рассмотрены в работе [27]. При изложении предлагаемого материала рассуждения ограничены границами метода перемещений, т. е. соблюдается принцип минимума потенциальной энергии.

Работа состоит из четырех глав.

Первая глава посвящена особенностям работы пластин и оболочек, подкрепленных ребрами жесткости. Рассмотрены вопросы выбора вектора узловых неизвестных при общей постановке решения задач. Приведены некоторые расчетные схемы и принятые допущения.

Во второй главе изложена методика построения матриц жесткости пластин и пологих оболочек, подкрепленных ребрами жесткости. Особенностью методики являются независимая аппроксимация элементов функционала и, как следствие, исключение понятия совместности вдоль границ смежных элементов из рассматриваемого алгоритма. Предлагаемый метод построения матриц жесткости требует обязательного выполнения требования полноты аппроксимирующего полинома и условий совместности в узловых точках исследуемой области.

Третья глава посвящена изложению простейших схем аппроксимации при построении матриц жесткости. Рассмотрены линейные и квазилинейные формы аппроксимации в пределах элементов произвольной треугольной и четырехугольной форм. Алгоритмы построения матриц жесткости отличаются минимумом машинных операций, отсутствием явных операций дифференцирования и интегрирования функций. Даны результаты численных расчетов тестовых задач и реальных конструкций.

В четвертой главе изложена вариационно-разностная процедура в схеме метода конечных элементов. Приведены алгоритмы формирования матриц жесткости с использованием вариационно-разностной процедуры. Обсуждены вопросы сходимости решения некоторых задач при использовании вариационно-разностного подхода в методе конечных элементов.

При написании четвертой главы в нее были включены некоторые материалы из диссертационной работы Н. И. Восковщука, выполненной под руководством автора.

Автор считает своим долгом отметить, что при написании этой книги большую помощь оказало обсуждение работы, проведенное на секции по численным методам расчета судовых конструкций НТО судостроительной промышленности им. академика А. Н. Крылова под руководством

заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, докт. техн. наук, профессора В. А. Постнова.

Кроме того, большая помощь автору, выразившаяся в поддержке и добрых советах, была оказана заслуженным деятелем науки и техники РСФСР, докт. техн. наук, профессором Н. В. Барабановым, докт. техн. наук, профессором Н. Ф. Ершовым, канд. техн. наук В. Н. Кустовым. Всем им автор выражает искреннюю благодарность.

ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

u, v, w – компоненты полного перемещения точки срединной поверхности;

u_p, v_p, w_p – компоненты полного перемещения центра тяжести поперечного сечения ребра;

ϵ_{ij} – компоненты полной деформации;

ϵ^0_{ij} – компоненты тангенциальной деформации волокон срединной поверхности пластин или оболочек;

$\chi_{ij} = -\dfrac{d^2 w}{\partial x_i \partial x_j}$ – параметры, характеризующие изгиб и кручение срединной поверхности;

$D^0_{ij},\ D_{ij}$ $(i = j)$ – тангенциальная и изгибная жесткости элемента;

$D^0_{ij},\ D_{ij}$ $(i \neq j)$ – жесткости на сдвиг элемента;

$Э$ – полная энергия системы;

V – потенциальная энергия деформации;

U – потенциальная энергия внешних сил;

A – работа внешних сил;

Q – поперечная составляющая внешней нагрузки;

J^0 – момент инерции поперечного сечения ребра относительно центра тяжести сечения;

F – площадь поперечного сечения ребра;

η – отстояние центра тяжести площади поперечного сечения ребра от нижней поверхности элемента;

k_i – кривизна поверхности оболочки;

e_m – элемент функционала;

e_{mr} – значение e_m в узловой точке r;

q_i – значение узлового обобщенного перемещения;

$\lfloor A \rfloor$ – матрица-строка;

$\{A\}$ – вектор-столбец;

$\lceil A \rfloor$ – диагональная матрица;

$\lceil I \rfloor$ – единичная диагональная матрица;

$[k_{ij}]$ – матрица жесткости.

ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ, ГИПОТЕЗЫ И ДОПУЩЕНИЯ. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

В строительной механике расчет конструкций производится на основе определенной физической модели, отражающей основные геометрические, жесткостные и механические характеристики конструкций. Модель должна учитывать как можно больше факторов, оказывающих влияние на работу реальной конструкции. Одной из особенностей подкрепленных конструкций является характер взаимодействия подкрепляющих ребер и обшивки. Особенно важен учет истинного взаимодействия этих элементов при расчете конструкций, подкрепленных балками переменного сечения, произвольного направления, а также если балки располагаются на различном расстоянии друг от друга.

Расчет пластин, подкрепленных ребрами жесткости, сводится в общем случае к трехмерной задаче теории упругости, причем получение точного решения вряд ли возможно. В настоящее время разработано несколько расчетных схем для приближенного решения задач изгиба пластин, подкрепленных ребрами жесткости.

По первому варианту расчета пластины рассматриваются как системы пересекающихся балок, роль настилов при этом состоит в передаче балкам внешней нагрузки, а также участии в изгибе ребер жесткости в качестве присоединенных поясков [19, 24, 34] и др.

Согласно второй расчетной схеме [13, 15, 19, 26, 31], получившей наибольшее распространение, пластина, подкрепленная ребрами жесткости, считается гладкой и конструктивно анизотропной, имеющей различную жесткость в двух направлениях относительно деформаций изгиба и кручения.

Третий подход заключается в рассмотрении пластин с дискретно расположенными ребрами жесткости [8, 16, 21, 32]. В этом случае наиболее полно учитывается характер взаимодействия ребра и пластины по линии их контакта.

При решении конкретных задач, исключительно важных для исследования прочности конструкций, применялись различные методы: аналитические, вариационные, численные, а также экспериментальные методы.

Аналитические методы решения краевых задач сводятся к интегрированию исходной разрешающей системы дифференциальных уравнений, которая составлена с учетом заданных граничных условий и внешних нагрузок, действующих на исследуемую конструкцию. При этом интегрирование дифференциальных уравнений связано со значительными трудностями вычислительного характера. Поэтому усилия многих исследователей были направлены на разработку приближенных методов решения. Широкое распространение получили вариационные методы. Результат решения задач при использовании данных методов во многом зависит от того, насколько удачно выбраны координатные функции. Для достаточно точного решения задачи необходимо использовать значительное число координатных функций, в связи с чем резко возрастает трудоемкость всех вычислительных операций.

Основной недостаток решений, полученных вариационными методами, заключается в том, что координатные функции выбираются для всей области. Описать достаточно точно такими функциями область с относительно сложными геометрическими, физическими и граничными условиями практически невозможно.

Более широкий круг задач строительной механики и теории упругости позволяют решать численные методы, из которых можно выделить две большие группы: разностные методы и метод конечных элементов.

§ 1. Метод конечных разностей и вариационно-разностный метод

Общие уравнения теории тонких пластин, подкрепленных ребрами жесткости, представляют собой, с математической точки зрения, систему дифференциальных уравнений восьмого порядка. Для численного решения такой задачи весьма подходящим оказался метод сеток или метод конечных разностей, который получил широкое развитие как наиболее подготовленный для реализации на ЭВМ. Методика расчета заключается в том, что приближенное решение краевой задачи основано на замене дифференциальных уравнений конечно-разностными уравнениями. Метод конечных разностей (МКР) приводит к системе алгебраических уравнений, в которых неизвестными величинами являются значения искомой функции в узлах сетки. Различные варианты построения разностных схем изложены в работе [9].

Достоинство МКР в его простоте. Метод имеет следующие недостатки:

неудобство исследования пластин переменной толщины ввиду значительного усложнения дифференциальных уравнений;

значительные трудности в составлении конечно-разностных уравнений, если сетка нерегулярна и ее направления не совпадают с направлениями координатных линий;

приближенный учет граничных условий.

Для удобного и точного учета граничных условий П. М. Варваком [6] были предложены коэффициенты влияния, а также применена контурная рамная аналогия с изменением шага сетки и увеличением числа узлов.

Известны различные рекомендации [2, 6, 27, 34] относительно того, в каких точках сеточной области следует удовлетворять дифференциальным уравнениям и каким образом аппроксимировать граничные условия. В ряде работ предлагается удовлетворять дифференциальные уравнения только во внутренних точках области с грубой или утонченной аппроксимацией граничных условий без использования законтурных точек. В других работах дифференциальные уравнения заменяются конечно-разностными во всех точках области с введением в решение законтурных точек.

Разнообразие указанных выше вычислительных схем связано со стремлением, во-первых, сократить число неизвестных путем ликвидации законтурных точек и, во-вторых, более точно удовлетворить граничные условия при использовании аппроксимации одного порядка как в поле, так и на границе. В первом случае часто используются более грубые разностные формулы для аппроксимации производных вблизи границы области по сравнению с формулами, которые применяют при замене дифференциальных уравнений конечно-разностными соотношениями внутри ее. Недостаток такого подхода при решении краевых задач методом сеток заключается в том, что первоначально поставленная цель о снижении объема вычислений не достигается [18], так как для более точного решения задачи необходимо уменьшать шаг сетки и, следовательно, повышать порядок разрешающей системы уравнений. Во втором случае необходимо использовать в решении кинематические и естественные граничные условия, что нарушает стойкость алгоритма и делает его зависящим от конкретных граничных условий.

Хотя метод сеток получил широкое распространение и с его помощью было решено большое число задач по расчету гладких и ребристых пластин, в ряде случаев, когда область имеет угловые зоны или смешанные краевые условия, МКР приводит к противоречиям, неопределенностям и к необходимости прибегать к искусственным и не всегда обоснованным приемам [6, 18]. Матрица коэффициентов системы уравнений не всегда оказывается симметричной, что усложняет задачу в вычислительном отношении.

Эти обстоятельства, а также желание автоматизировать вычислительный процесс побудило развить вариационный метод построения сеточных уравнений, который еще в 1928 г. был применен Курантом, Фридриксом и Леви [37] для получения конечно-разностных выражений гармонических и бигармонических уравнений. С развитием электронно-вычислительных машин интерес к этому методу заметно усилился.

Большой вклад в развитие вариационно-разностного метода (ВРМ) при решении задач изгиба пластин и оболочек внесен Д. В. Вайнбергом и его учениками [5]. В вариационно-разностном методе разрешающие уравнения получают из условия стационарности исходного энергетического функционала, в котором производные предварительно заменяются разностными соотношениями, а интегрирование – суммированием по области.

Применение принципа минимума полной потенциальной энергии позволяет провести процедуру приближенного решения краевой задачи,не требуя от задаваемых перемещений той степени гладкости, которая отвечает дифференциальным уравнениям. Это объясняется тем, что в функционал полной потенциальной энергии системы или в вариационное уравнение Лагранжа входят производные от перемещений не выше m-го порядка, в то время как в дифференциальные уравнения входят производные $2m$-го порядка. Если еще учесть, что вариационно-разностный метод не требует явной формулировки естественных граничных условий, то становится ясным, почему он нашел широкое применение при решении задач изгиба пластин и оболочек, подкрепленных ребрами жесткости.

Классическая схема ВРМ предлагает определять производные путем разложения искомой функции в ряд Тейлора. Первоначально при расчете пластинчатых конструкций в основном использовалась регулярная сетка. Так как с помощью такой сетки нельзя достаточно точно описать разнообразные контурные условия, то ограничивался круг задач, которые могли быть решены этим методом.

В работах Н. П. Абовского [1, 2] и других исследователей решено большое количество инженерных задач изгиба пластин и оболочек, подкрепленных системой ребер,как параллельных контуру, так и наклонных к нему, учтены дискретное расположение ребер, их сдвиг и эксцентриситет. Граничные условия при этом имели частный характер (например, контур пластины ограничивался прямолинейными отрезками), и использовалась только регулярная сетка.

В 1970 г. Д. Джонсон при расчете оболочек со сложными краевыми условиями для построения дискретных аналогов дифференциальных операторов предложил использовать нерегулярную четырехугольную сетку и показал, что такой путь установления разностных операторов функционала ведет к хорошей сходимости решения к точному конечному результату [39]. Тем не менее применительно к задачам расчета подкрепленных пластин и оболочек такой путь не получил дальнейшего развития.

Излагаемый в четвертой главе вариант вариационно-разностного метода строится в схеме метода конечных элементов, что дает возможность воспользоваться преимуществами более совершенной схемы машинной реализации численного решения. При этом основные положения метода конечных элементов в полной мере справедливы и для рассматриваемого варианта ВРМ.

§ 2. Метод конечных элементов

В результате развития вычислительной техники конкуренцию разностным методам составил в настоящее время метод конечных элементов (МКЭ). Он стал одним из самых распространенных методов решения задач механики твердого тела, что объясняется его достоинствами вычислительного характера, а также возможностью дать конкретный и ясный физический смысл всем подлежащим определению неизвестным (или некоторым их линейным комбинациям).

Начиная с работ Леви, в которых он обосновал основные идеи метода перемещений и пытался моделировать конструкцию самолета как набора одномерных балок, методу конечных элементов уделяется все возрастающее внимание. В работах [38, 40] встречаются первые попытки свести приближенное решение континуальных систем к процедуре, аналогичной расчету стержневых систем в строительной механике.

В 60-х годах появились работы [3, 36, 41 и др.], которые можно считать основополагающими для метода конечных элементов. В эти же годы сформулировался следующий алгоритм расчета с использованием МКЭ:

1. Идеализация конструкции с помощью конечных элементов;
2. Выбор основных неизвестных.
3. Выбор координатных функций, аппроксимирующих перемещения в элементах.
4. Определение узловых усилий,эквивалентных всем факторам, вызывающим напряженно-деформированное состояние конечного элемента (построение матриц жесткости и матриц податливости).
5. Построение основной системы разрешающих уравнений, при решении которой определяются выходные параметры краевой задачи.

Первые три пункта алгоритма являются основными, так как от правильного выбора геометрической формы используемых элементов, количества конечных элементов, а также вида координатных функций во многом зависит точность решения поставленной задачи в целом.

В публикациях, последовавших за указанными работами Д. Аргироса, Р. Клафа, Н. Тарнера, форма координатных функций задавалась исходя из конкретных условий поставленной задачи на основе предположений и догадок того или иного исследователя. После первых попыток выработать общие требования к функциям перемещений конечного элемента исследователи стали более осмысленно подходить к выбору координатных функций. В работах [11, 17, 30 и др.] определены критерии для выбора систем координатных функций, обеспечивающих сходимость решения к точному результату.

При построении конечно-элементных моделей используется все многообразие вариационных формулировок теории упругости. Наиболее распространенной является такая форма метода конечных элементов, в которой неизвестными являются обобщенные узловые перемещения, а разрешающая система уравнений получается путем использования принципа возможных перемещений.

Если же аппроксимировать усилия с таким расчетом, чтобы они заранее удовлетворяли дифференциальным уравнениям внутри каждого элемента, то путем применения принципа возможных изменений напряженного состояния можно получить систему разрешающих уравнений относительно части усилий, принятых за лишние неизвестные.

Первый из этих подходов соответствует методу перемещений, а второй – методу сил. Возможен также подход, в котором неизвестными являются одновременно и перемещения, и усилия. Независимая аппроксимация этих групп неизвестных позволяет снизить порядок полиномов, используемых при аппроксимации перемещений, так как отпадает необходимость в дифференцировании перемещений для вычисления усилий. Наибольшее распространение нашел метод перемещений.

В настоящее время получены важные результаты в области теории и реализации МКЭ благодаря большой группе отечественных и зарубежных исследователей, внесших большой вклад в развитие и популяризацию метода конечных элементов: В. А. Александрова, Д. В. Вайнберга, В. Г. Корнеева, В. А. Постнова, Л. А. Розина, Н. Н. Шапошникова, Д. Аргироса, О. Зенкевича, Р. Клафа, Р. Мелоша, М. Тарнера и многих других.

Наиболее подробно вопросы теории и практического использования МКЭ освещены в монографиях [12, 14, 29, 31] и многих других.

Реализация метода конечных элементов связана с решением следующих вопросов: дискретизация области, выбор системы конечных элементов, анализ особенностей интерполирования исследуемых функций и выбор вектора обобщенных узловых перемещений, удовлетворение условиям сходимости.

Ниже мы обсудим эти аспекты метода конечных элементов прежде всего с позиций расчета подкрепленных пластин и пологих оболочек.

§ 3. Схемы дискретизации области. Типы конечных элементов

При решении задач строительной механики методом конечных элементов возможны различные схемы дискретизации области в зависимости от принятых исходных предпосылок и допущений. Две, наиболее общие из них, рассмотрены на примере расчетной схемы палубного перекрытия (рис. 1).

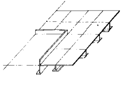


Рис. 1. Расчетная схема палубного перекрытия.

Прежде всего представление исследуемой области как совокупности конечных элементов необходимо связывать с принятой системой исходных допущений и предпосылок.

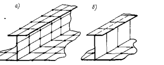


Рис. 2. Схемы дискретизации ребер и подкрепляемой обшивки.

Если задача решается в наиболее строгой постановке с привлечением минимума допущений, то вся конструкция может быть представлена совокупностью двухмерных элементов. В этом случае подкрепляющие ребра, рассматриваемые как часть всей конструкции, представляются системой тех же двухмерных элементов (рис. 2, *а*).

При решении многих прикладных задач можно, имея в виду принятые кинематические гипотезы, пойти на некоторое упрощение, представив ребра жесткости как систему одномерных элементов и сохранив прежнее представление для настила палубы (рис. 2, *б*).

Первая схема – наиболее строгая, но и более громоздкая и сложная в реализации. В основном она применяется при определении напряженного состояния в решении плоской задачи теории упругости. Вторая схема более проста. В этом случае делается определенное предположение о характере изменения перемещений по высоте подкрепляющего ребра, что дает возможность соблюсти условия совместности перемещений точек ребра и подкрепляемого элемента по линии контакта. Последняя схема и положена в основу методики расчета подкрепленных элементов конструкций, излагаемой ниже.

В соответствии с принятым характером дискретизации исследуемой конструкции ребра жесткости, произвольно ориентированные в плоскости рассматриваемого перекрытия, представляются суммой прямолинейных

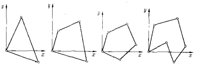


Рис. 3. Конечные элементы, сформированные на базе треугольного элемента.

элементов, связанных условиями совместности в смежных узлах. Момент инерции площади поперечного сечения ребра может быть переменным по длине, но в пределах конкретного элемента будет использоваться допущение о неизменности площади и момента инерции поперечного сечения. Предполагается, что в пределах линейного элемента имеется два узла. Элементы с большим количеством узлов рассматриваться не будут, хотя принципиальных сложностей при введении дополнительных узлов не возникает.

Излагаемая методика построения матриц жесткости дает возможность применять при построении расчетной схемы самые разнообразные виды плоских элементов (рис. 3). Но в целях простоты изложения ограничимся применением двух основных семейств элементов: треугольными и четырехугольными. Стороны каждого элемента представляют собой прямые линии. Предполагается, что в пределах элемента толщина не изменяется. Это требование не обязательно, но оно значительно упрощает вычислительную работу. Выбор того или иного вида элемента решается для каждого конкретного случая отдельно. Возможность моделирования криволинейных границ достигается уменьшением размеров элементов. Причем оба семейства элементов могут быть использованы одновременно внутри области, если в этом возникает необходимость. Предпочтительнее применение четырехугольного элемента, поскольку в этом случае при увеличении точности расчета уменьшаются затраты на подготовку исходной информации.

Процесс дискретизации является одним из первых и важных этапов в схеме метода конечных элементов. При этом можно выделить два тесно связанных этапа: разбиение тела на элементы и нумерация узлов элементов. Последний этап связан с проблемой сокращения ширины ленты системы уравнений, поскольку она влияет на эффективность вычислений, необходимых для получения решения. Все рекомендации по выполнению

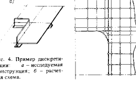


Рис. 4. Пример дискретизации: *а* – исследуемая конструкция; *б* – расчетная схема.

этого этапа, рассмотренные в других источниках, остаются неизменными и в нашем случае.

При разбиении любой двухмерной области на элементы тело делится на треугольные и четырехугольные подобласти. Границы между подобластями должны проходить там, где изменяются геометрия, приложенная нагрузка или свойства материала. Особенностью дискретизации подкрепленных конструкций является соблюдение условия обязательного прохождения подкрепляющего ребра вдоль той или иной кромки элемента. В рассматриваемой ниже методике другого варианта подкрепления не предполагается, хотя в принципе он возможен. В этом случае необходимо предусмотреть наличие матрицы жесткости с иным характером подкрепления.

Применение изложенных идей дискретизации проиллюстрировано на рис. 4. Расстояние между узлами вдоль криволинейной границы выбирается из условия максимального отражения действительного напряженно-деформированного состояния.

§ 4. Особенности аппроксимации при расчете подкрепленных конструкций

Прежде чем говорить об особенностях математического моделирования напряженно-деформированного состояния подкрепленных конструкций, следует сказать, что в каждом конкретном случае при корректно проведенной аппроксимации мы должны получить результаты, приближающиеся к теоретическим, если они могут быть получены с наперед заданной степенью точности. Это замечание сделано с той целью, чтобы не возникали иллюзии у начинающих исследователей или читателей, которые используют готовые программы расчетов по методу конечных элементов, не являясь специалистами в области МКЭ. В частности, может создаться такая ситуация. Проведен некоторый физический эксперимент, произведен расчет его математической модели методом конечных элементов,и на основе тех же исходных предпосылок, допущений и гипотез получено точное математическое решение. При этом одинаково строго учтены граничные условия. Но в силу реальных обстоятельств получился разброс в результатах, полученных при эксперименте и точном решении, а результаты расчета по методу конечных элементов совпали с результатами эксперимента. Это совсем не будет означать, что метод конечных элементов дает решение более точное, чем аналитическое. Как раз наоборот. Раз мы не приблизились к результатам аналитического решения, следовательно, мы либо не выбрали возможностей МКЭ, либо принятая форма аппроксимации не удовлетворяла необходимым требованиям. Вопрос же совпадения или несовпадения результатов аналитического расчета и эксперимента прежде всего связан со степенью совершенности математической модели, которая ложена как основа и в аналитическую форму расчета, и в численную.

В связи с этим, прежде чем говорить об особенностях аппроксимации напряженно-деформированного состояния, на примере прямоугольной в плане пологой оболочки, подкрепленной ребрами жесткости (рис. 5), рассмотрим основные зависимости, следующие из вариационного принципа минимума потенциальной энергии системы. Пусть оболочка подкреплена ребрами, которые делят ее на $(n-1)$ частей. Относительно ребер сделаем следующие предположения:

нейтральная ось ребра лежит на срединной поверхности оболочки, $x = x_i$, $i = 1, 2, 3, ..., n$;

соединения ребер с оболочкой удовлетворяют условиям совместности деформаций;

изгибными жесткостями ребер в плоскости, касательной к срединной поверхности оболочки, можно пренебречь;

одна из главных осей инерции поперечных сечений ребер перпендикулярна к срединной поверхности оболочки.

Учет эксцентриситета ребер в данном случае не отразится на характере рассуждений, поэтому мы им пренебрегли.

На каждый межреберный участок оболочки действует нормальная поверхностная нагрузка $Q_i\,(x,\ y)$, а на каждое ребро – нормальная к его оси нагрузка $Q_i\,(y)$, $i = 1, 2, 3, ..., n$. Рассматриваемую подкрепленную пологую оболочку можно представить как совокупность прямоугольных в плане, подкрепленных элементов размерами a и b. Тогда для вывода уравнений равновесия пологих элементов оболочки с ребрами жесткости и условий на ребрах жесткости воспользуемся принципом минимума потенциальной энергии системы, который в применении к рассматриваемой задаче можно сформулировать так: действительные перемещения срединной поверхности оболочки u, v, w и ребер жесткости u_p, v_p, w_p, соответствующие данным граничным условиям и нагрузке и переводящие оболочку из естественного положения в состояние упругого равновесия, отличаются от возможных тем, что они сообщают минимальное количество потенциальной энергии рассматриваемой упругой системе.

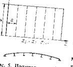


Рис. 5. Подкрепленная пологая цилиндрическая панель.

Так как оболочка с ребрами деформируется без изломов и разрывов, то ее перемещения при переходе от одного элемента к другому должны удовлетворять условиям:

$$\left.\begin{aligned} &u_i\,(x_i,\ y) = u_{i+1}\,(x_i,\ y) = u_i\,(y);\\ &v_i\,(x_i,\ y) = v_{i+1}\,(x_i,\ y) = v_i\,(y);\\ &w_i\,(x_i,\ y) = w_{i+1}\,(x_i,\ y) = w_i\,(y);\\ &\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{i+1},\\ &i = 1, 2, 3, ..., n. \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Не останавливаясь в данном случае на промежуточных операциях, с ними можно ознакомиться, например, в [22], из вариационного принципа получим систему дифференциальных уравнений равновесия пологого элемента

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T_{1i}}{\partial x} + \frac{\partial S_i}{\partial y} = 0;\\ &\frac{\partial S_i}{\partial x} + \frac{\partial T_{2i}}{\partial y} = 0;\\ &\frac{\partial N_{1i}}{dx} + \frac{\partial N_{2i}}{\partial y} + \frac{T_{1i}}{R_1} + \frac{T_{2i}}{R_2} + Q_i = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

и четыре условия на каждом ребре или условия на линиях $x = x_i$:

$$\left.\begin{aligned} &T_{1,\,i} - T_{1,\,i+1} = 0;\\ &S_i - S_{i+1} = EF_{i\,p}\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} - \frac{1}{R_2}\,\frac{\partial w_i}{\partial y}\right);\\ &M_{1,\,i+1} - M_{1,\,i} = C_i\,\frac{\partial^3 w_i}{\partial x \partial y^2};\\ &R_{1,\,i+1} - R_{1,\,i} = -\frac{EF_{i\,p}}{R_2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y} - \frac{1}{R_2}\,w_i\right) + EJ_i\,\frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} - Q_{i\,p} \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

Здесь приняты следующие обозначения:
F_{ip} – площадь поперечного сечения ребра; EJ_i – жесткость ребра на изгиб; C_i – жесткость ребра на кручение; R_i – радиус кривизны пологой оболочки; T – продольное усилие; S – сдвигающее усилие; M – изгибающий момент; H – крутящий момент; $R_{m,\ n}$ – реактивное усилие;

$$\left.\begin{aligned} &M_1 = -D(\chi_{11} + \nu\chi_{22})\,;\; M_2 = -D(\chi_{22} + \nu\chi_{11})\,;\\ &S = 6h^{-2}D(1-\nu)\epsilon_{12}^0\,;\; H = -D(1-\nu)\chi_{12}\,;\\ &T_1 = 12h^{-2}D(\epsilon_{11}^0 + \nu\epsilon_{22}^0)\,;\; T_2 = 12h^{-2}D(\epsilon_{22}^0 + \nu\epsilon_{11}^0)\,;\\ &D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\,;\\ &N_1 = \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial M_1}{\partial x}\,;\; N_2 = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Поскольку соотношения (4.3) связывают между собой силовые параметры двух смежных элементов, то, учитывая их, можно более разумно подойти к формированию вектора узловых неизвестных. Например, если толщина смежных элементов одинакова и отсутствуют подкрепляющие ребра жесткости, то третье уравнение из системы (4.3) принимает вид

$$M_{1,\,i} = M_{1,\,i+1},$$

или

$$\left(\frac{d^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_i = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{i+1}$$

Тогда как

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_i = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{i+1},$$

поскольку ось y при $x = x_i$ является осью сопряжения элементов, получим

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_i = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{i+1}. \tag{4.5}$$

Следовательно, если рассматривается деформация пластин или пологих оболочек постоянной толщины, то в качестве узловых неизвестных можно использовать и значения частных производных $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

В случае действия различных сосредоточенных силовых факторов эта рекомендация будет недействительна.

Допустим теперь, что ребра жесткости отсутствуют, но смежные элементы имеют различные толщины. Тогда из (4.3) получим

$$D_i\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_i = D_{i+1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{i+1},$$

а следовательно, $\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_i \neq \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{i+1}$.

Здесь уже наблюдаются разрывы непрерывности в значениях частных производных при переходе от одного элемента к другому.

Если элементы подкреплены ребрами жесткости, то условия сопряжения (4.3) накладывают еще более жесткие ограничения на характер вектора узловых неизвестных. В случае необходимости учета жесткости ребер на кручение, даже при использовании элементов с одинаковой толщиной, мы не должны принимать в качестве неизвестных значения высших частных производных.

Аналогичные рассуждения можно привести относительно первых частных производных от u и v. Основой для анализа уже будут первое и второе уравнения системы (4.3).

Иногда можно допустить принятие в качестве узлового неизвестного параметра $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Обычно это делается в случае использования прямоугольного элемента. Если же элемент имеет форму произвольную, то принятие в качестве узлового неизвестного смешанной производной фактически требует равенства и других частных производных, чего не должно быть в силу отмеченных выше условий. Например, допустим, что смежные стороны соседних элементов наклонены под углом α к оси x (рис. 6). Тогда можно записать

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{\mathrm{I}}\cos^2\alpha + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{\mathrm{I}}\sin\alpha\cos\alpha + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\mathrm{I}}\sin^2\alpha;$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)_{II} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{II} \cos^2 \alpha + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{II} \sin \alpha \cos \alpha + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{II} \sin^2 \alpha.$$

Приравнивая правые части этих уравнений друг к другу, так как

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)_{I} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)_{II},$$

получим

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{I} \cos^2 \alpha + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{I} \sin^2 \alpha = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{II} \cos^2 \alpha + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{II} \sin^2 \alpha.$$

Откуда и следуют равенства: $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{I} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{II}$; $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{I} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{II}$,

противоречащие в общем случае условию, вытекающему из (4.3).

Так как метод конечных элементов является универсальным методом решения широкого круга задач, то целесообразно не ограничиваться частными задачами и при выборе вектора узловых неизвестных учесть все ограничения, следующие из вариационных принципов механики деформирующего тела. Поэтому, учитывая порядок производных, входящих в исходный функционал, в дальнейшем в качестве узловых неизвестных будем принимать узловые значения искомых функций и их низшие производные.

Приведенные выше рассуждения являются основой для выбора разрешающего полинома искомой функции в пределах рассматриваемого элемента. Одной из распространенных форм его записи является

$$\varphi = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} a_{ij} x^i y^j, \quad i + j \leqslant N. \tag{4.6}$$

Здесь N порядок полинома. Постоянные a_{ij} определяются из условий сопряжения смежных элементов в узловых точках.

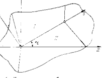


Рис. 6. Дискретизация области с помощью четырехугольных элементов.

Следует заметить, что выбор полинома в методе конечных элементов - одна из сложных и ответственных операций.

Все преимущества МКЭ нарушаются при неудачно подобранном полиноме, тем более что многие результаты решения прикладных задач, полученные с помощью метода конечных элементов, могут быть оценены лишь качественно. Поэтому особую роль в этом методе приобретают вопросы сходимости решения к точному результату.

§ 5. Условия сходимости

Так как метод конечных элементов является методом приближенного решения уравнений математической физики, возникает вопрос о его сходимости к точному решению. Полагая, что сходимость МКЭ к точному решению аналогична сходимости метода Ритца, можно рассматривать ее в энергетическом смысле. Это значит, что для задач теории упругости при условии закрепления тела от жесткого смещения потенциальная энергия деформации от разности точного u^* и приближенного u_n решений должна стремиться к нулю при неограниченном возрастании числа координатных функций

$$Э(u^* - u_n) \to 0, n \to \infty. \tag{5.1}$$

Для рассматриваемых задач доказана сходимость МКЭ в смысле (5.1), если выполняются следующие условия:

1. Координатные функции должны образовывать геометрически возможные перемещения в пределах всего тела.
2. Координатные функции должны быть линейно независимыми.
3. Координатные функции должны образовывать полную систему функций.

Кроме указанных требований часто предполагают и дополнительные [12, 29].

4. Функции перемещений должны быть такими, чтобы в случае, когда узловые перемещения соответствуют условию постоянной деформации, это состояние действительно реализовалось бы в элементе.
5. Функции перемещений должны быть выбраны так, чтобы деформации на границах между элементами были конечными.
6. Функции перемещений должны быть выбраны таким образом, чтобы не возникала деформация элемента при узловых перемещениях, вызванных его смещением как жесткого тела.

Шесть условий, приведенных выше, дают возможность обеспечить сходимость решения при их выполнении. При этом некоторые из них могут быть объединены.

Условия 1 и 5 будут удовлетворены, если для уравнений $2m$-го порядка должно быть $(m - 1)$ непрерывных производных. Условие 6 может рассматриваться как частный случай условия 4, поскольку жесткое перемещение является частным случаем равной нулю однородной деформации.

Элементы, координатные функции которых удовлетворяют условиям 1 и 5, называются совместными. Сложность удовлетворения всем условиям одновременно часто приводит в расчетной практике к использованию несовместных элементов. Одним из таких элементов является прямоугольный элемент [12, 29], содержащий 12 неизвестных параметров,

$$\{q\} = \left\{w_1, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial w_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial w_4}{\partial y}\right\}. \tag{5.2}$$

Выражение для интерполирующего полинома функции состоит из полного квадратичного полинома и шести дополнительных членов и имеет вид

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \\ + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \tag{5.3}$$

Зависимость (5.3) содержит все линейные члены, наличие которых важно для выполнения условий полноты, так как они могут описывать состояние постоянной плотности энергии для элемента.

Линейные члены необходимы и для удовлетворения главным граничным условиям. Решение на основе полинома (5.3) для ряда задач сходится к точному при уменьшении размеров элементов. Сходимость для этих задач следует и из другой особенности полинома (5.3), которая заключается в том, что при двукратном дифференцировании он приводит к линейному характеру изменения вторых производных по границам элемента. Следовательно, разрыв в значениях вторых производных по границе смежных элементов будет определяться разрывом этих производных в узловых точках, где соблюдается условие неразрывности первых производных. В силу этого при уменьшении сторон элементов разрыв непрерывности вторых производных в узловых точках будет стремиться к нулю или к естественному разрыву, допускаемому физической сущностью задачи, а это в свою очередь приводит к аналогичной ситуации и по границам смежных элементов, что в итоге и определяет сходимость решения при удовлетворении всех других критериев сходимости.

Если не выполняются требования симметрии полинома, которые необходимы с целью обеспечения инвариантности матриц элементов, то даже формально совместные элементы могут приводить к расходящимся решениям. Для примера рассмотрим тот же конечный элемент, но полином, отражающий характер поперечного перемещения в его пределах, примем в виде [10]

$$w(x, y) = X_1 Y_1 w_1 + X_1 Y_3 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1 - X_3 Y_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1 + X_1 Y_2 w_2 + X_1 Y_4 \times \\ \times \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2 - X_3 Y_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2 + X_2 Y_1 w_3 + X_2 Y_3 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3 - X_4 Y_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_3 + \\ + X_2 Y_2 w_4 + X_2 Y_4 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_4 - X_4 Y_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_4; \tag{5.4}$$

$$X_1 = a^{-3}(2x^3 - 3a x^2 + a^3); \quad X_2 = a^{-3}(-2x^3 + 3a x^2);$$

$$X_3 = a^{-2}(x^3 - 2a x^2 + a^2 x); \quad X_4 = a^{-2}(x^3 - a x^2).$$

Полиномы типа Y_i аналогичны X_i с заменой a на b и x на y. Здесь a и b – размеры элемента.

Полином (5.4) удовлетворяет условиям 4, 5, 6 и условиям непрерывности перемещений и их первых производных по линиям контакта КЭ. Определенным недостатком полинома шестой степени является отсутствие некоторых членов и отличие от однородного решения дифференциального оператора для изгибаемой пластины. Другим недостатком полинома является его особенность, приводящая к несимметричному закону распределения деформаций в пределах элементов, фактически наделяющая элемент различной жесткостью в направлении координатных осей. Отмеченные недостатки не обеспечивают сходимости решения (табл. 1).

Таким образом, выбор полиномов с пониженной степенью непрерывности для элементов с узлами лишь в вершинах представляет собой сложную задачу. Еще более этот процесс усложняется для элементов произвольной формы.

§ 6. Гипотезы и допущения. Исходные зависимости

При рассмотрении объемной задачи теории упругости мы встречаемся с четырьмя группами основных уравнений: уравнениями равновесия бесконечно малого объема рассматриваемого тела (условия статического равновесия); условиями сплошности; связью между компонентами деформации и перемещения, получаемой из рассмотрения чисто геометрической картины деформирования материала тела; законом Гука, определяющим зависимость между напряжениями и деформациями в упругом теле.

Таблица 1. Величины прогиба в центре шарнирно опертой квадратной пластины, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки ($E = 3 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0{,}25$; $Q = 1$ МПа; $a = b = 200$ см²; $h = 10$ см).

Вид решения	Величина прогиба, см
Решение в рядах при количестве членов ряда:	
20	2,437
100	2,437
200	2,437
Решение по МКЭ с расчетной сеткой:	
4 x 4	2,583
12 x 12	3,131
20 x 20	3,181
Метод конечных разностей с расчетной сеткой:	
4 x 4	2,430

Поскольку получение решения объемной задачи теории упругости наталкивается на ряд математических трудностей, классическая теория тонких пластин и пологих оболочек основывается на известных гипотезах Кирхгофа Лява, которые формулируются следующим образом.

Предполагается, что прямолинейные волокна пластины или пологой оболочки, перпендикулярные к ее срединной поверхности до деформации, остаются после деформации также прямолинейными и перпендикулярными к изогнутой срединной поверхности; длина волокон, перпендикулярных к срединной поверхности, остается неизменной в процессе деформации; нормальные напряжения σ_z на площадках, параллельных срединной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с прочими напряжениями.

В. В. Новожиловым [23] было показано, что эти гипотезы приводят в исходных уравнениях к погрешности порядка h/R по сравнению с единицей. Такая погрешность вполне приемлема при расчете многих конструкций, встречающихся в различных областях техники, особенно металлических конструкций.

Пологость элемента позволяет использовать следующие зависимости для компонентов деформации:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w; \; \epsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w; \\ \epsilon_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{12} w, \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

где u, v, w – компоненты смещения точек оболочки; $k_1 = 1/R_1$; $k_2 = 1/R_2$, $k_{12} = 1/R_{12}$; R_1, R_2, R_{12} – радиусы кривизны срединной поверхности.

Относительно ребер жесткости сделаем следующие предположения. Будем учитывать лишь жесткость ребер в плоскости, нормальной к срединной поверхности оболочки. Изгибными жесткостями ребер в плоскости, касательной к срединной поверхности оболочки, будем пренебрегать. Предполагая, что в процессе деформирования конструкции исключена возможность проскальзывания одного сопрягаемого элемента относительно другого, а также справедливость гипотезы плоских сечений для стержней, получим следующие формулы для компонентов перемещений точек (рис. 7):

$$u = u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{6.2}$$

где u_0, v_0 – компоненты смещения точек срединной поверхности. Выражения для деформаций примут вид

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_1^0 + \epsilon_{1u}; \; \epsilon_2 = \epsilon_2^0 + \epsilon_{2u}; \\ \epsilon_{12} &= \epsilon_{12}^0 + \epsilon_{12u}, \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_1^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - k_1 w; \; \epsilon_{1u} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \epsilon_2^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - k_2 w; \; \epsilon_{2u} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \epsilon_{12}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2k_{12} w; \; \epsilon_{12u} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

При эксцентричном расположении ребер (рис. 8) перемещения точек оси ребра n-го направления связаны с независимыми параметрами условиями неразрывности деформаций:

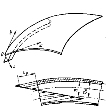


Рис. 7. К определению характера тангенциальных перемещений по нормали к изогнутой поверхности.

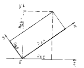


Рис. 8. К определению условий совместности деформации ребра и подкрепляемого элемента.

$$\left.\begin{aligned} u_{\mathrm{p}}^{(n)} &= u_0^{(n)} - \eta_0^{(n)} \frac{\partial w}{\partial n}; \\ v_{\mathrm{p}}^{(s)} &= v_0^{(s)} - \eta_0^{(s)} \frac{\partial w}{\partial s}; \\ w_{\mathrm{p}}^{(n)} &= w_0^{(n)}; \\ \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w_0}{\partial n};& \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w_0}{\partial s} \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

и дополнительными условиями

$$\left.\begin{aligned} u_0^{(n)} &= u_0 \cos (n^\wedge x) + v_0 \cos (n^\wedge y); \\ v_0^{(n)} &= -u_0 \cos (n^\wedge y) + v_0 \cos (n^\wedge x). \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

Здесь $\eta_0^{(n)}$ – эксцентриситет оси n-го ребра по отношению к срединной поверхности; $u_{\mathrm{p}}^{(n)}$, $v_{\mathrm{p}}^{(n)}$, $w_{\mathrm{p}}^{(n)}$ – перемещения точек оси ребра в системе координат nOs; $u_0^{(n)}$, $v_0^{(n)}$, $w_0^{(n)}$ – перемещения точек срединной поверхности оболочки в системе координат nOs.

Перемещения точек поперечного сечения ребра по высоте определяется зависимостью $u_{\mathrm{p}}^{(n)} = u_0^{(n)} - z \frac{\partial w}{\partial n}$, или, если ввести эксцентриситет центра тяжести ребра по отношению к нижней поверхности элемента – η, получим

$$u_{\mathrm{p}}^{(n)} = u_0^{(n)} - \eta \frac{\partial w}{\partial n} - (z - \eta) \frac{\partial w}{\partial n}. \tag{6.7}$$

Относительная линейная деформация волокон элемента ребра определяется зависимостью

$$\epsilon_{\mathrm{p}}^{(n)} = \epsilon_0^{(n)} - \eta \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} - (z - \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}, \tag{6.8}$$

где $\epsilon_0^{(n)} = \frac{\partial u_0^{(n)}}{\partial n} - k_{\mathrm{p}} w$; k_{p} – кривизна оси ребра жесткости.

Зависимости между напряжениями и деформациями в условиях плоского напряженного состояния определяются обобщенным законом Гука и в матричной форме имеют вид

$$\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\}, \tag{6.9}$$

где

$$[E] = \begin{bmatrix} \dfrac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \dfrac{\nu_{21}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \dfrac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \dfrac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

E_1, E_2, G_{12} – модули нормальной упругости в направлении осей x, y и модуль сдвига соответственно; ν_{12}, y_{21} – коэффициенты Пуассона; $\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11} \;\; \epsilon_{22} \;\; \epsilon_{12}\}$ – вектор деформаций; $\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \;\; \sigma_{22} \;\; \sigma_{12}\}$ – вектор напряжений.

Зависимость между напряжениями и деформациями для ребер определяется законом Гука для одноосного состояния: $\sigma_p = E_p \epsilon_p$, где E_p – модуль нормальной упругости материала ребра; ϵ_p – линейная относительная деформация волокон ребра.

§ 7. Вариационная постановка задачи

Решение задач строительной механики может быть проведено одним из двух методов. С помощью первого решают дифференциальные уравнения с заданными граничными условиями. Второй метод заключается в минимизации интегральной величины, связанной с работой напряжений и внешней приложенной нагрузки. Для решения задач методом конечных элементов чаще используется последний подход. Если задача решается в перемещениях и на границе заданы их значения, то нужно минимизировать потенциальную энергию системы. Если задача решается в напряжениях с заданными на границе усилиями, то нужно минимизировать дополнительную работу системы.

Наиболее распространенная формулировка метода конечных элементов, которая используется ниже, основана на понятии обобщенного функционала Лагранжа. Она предполагает отыскание поля перемещений и тем самым связана с минимизацией потенциальной энергии системы при отыскании узловых значений вектора перемещений $\{q\}$. После того как перемещения будут определены, можно вычислить компоненты тензоров деформаций и напряжений.

Из всех перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, стационарное (экстремальное) значение потенциальной энергии сообщают те перемещения, которые удовлетворяют уравнениям равновесия. Важное требование этой стороны состоит в том, что искомые перемещения должны удовлетворять заданным значениям на границе.

Полная потенциальная энергия упругой системы может быть разделена на две части, одна из которых соответствует энергии деформаций в теле, а другая определяется потенциальной энергией массовых сил и приложенных поверхностных сил. В соответствии с этим запишем полную потенциальную энергию в виде: $Э = V + U$, где V – энергия деформаций, а U – потенциальная энергия приложенных сил. Работа внешних сил противоположна по знаку их потенциальной энергии: $A = -U$.

Из последних двух формул получаем

$$Э = V - A. \tag{7.1}$$

После разбиения области на элементы равенство (7.1) записывается в виде суммы

$$Э = \sum_{i=1}^{N} (V_i - A_i) = \sum_{i=1}^{N} Э_i. \tag{7.2}$$

Если неизвестными в задаче являются элементы вектора $\{q\}$, то минимизируя функционал по всем элементам искомого вектора, получаем

$$\frac{\partial Э}{\partial \{q\}} = \left\{ \frac{\partial Э}{\partial q_1}, \frac{\partial Э}{\partial q_2}, \dots \right\} = 0 \tag{7.3}$$

Учитывая зависимость (7.2), преобразуем уравнение (7.3)

$$\frac{\partial Э}{\partial \{q\}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial Э_i}{\partial \{q\}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial Э_i}{\partial \{q\}_i}, \tag{7.4}$$

где суммирование производится по всем конечным элементам.

Для линейных задач функционал $Э$ является квадратичной функцией от искомой функции и ее производных, и, следовательно, i-й член правой части выражения (7.4) примет вид

$$\frac{\partial Э}{\partial \{q\}_i} = [K]_i \{q\}_i - \{P\}_i = 0, \tag{7.5}$$

где $[K]_i$ – матрица жесткости элемента. Коэффициенты этой матрицы определяются свойствами и геометрией среды; $\{P\}_i$ – вектор обобщенных сил. Он определяет внешнее воздействие на i-й элемент.

Исследуем характер выражения для энергии упругой оболочки, используемого в технических расчетах. Из курса теории упругости известно, что для любого упругого тела потенциальная энергия деформации его определяется по следующей формуле:

$$V = \frac{1}{2} \iiint_W \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dW, \tag{7.6}$$

где

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11}\ \epsilon_{22}\ \epsilon_{33}\ \epsilon_{12}\ \epsilon_{13}\ \epsilon_{23}\} -$$

– матрица-столбец деформаций подкрепленного элемента;

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}\ \sigma_{22}\ \sigma_{33}\ \sigma_{12}\ \sigma_{13}\ \sigma_{23}\} -$$

– матрица-столбец напряжений; W – объем, занимаемый телом.

Зависимость (7.6) позволяет в принципе исследовать деформации произвольных оболочек и пластин, подкрепленные ребрами жесткости.

Однако сложность задачи и, в первую очередь, ее пространственность делают возможность реального исследования весьма проблематичной. В то же время такая особенность пластин и оболочек, как малая толщина по сравнению с остальными размерами, малое отношение высоты ребер к их длине и небольшие размеры свободных поясков ребер дают возможность упрощения исходных зависимостей при достаточной точности окончательных результатов.

Учитывая принятые выше гипотезы, вектор деформаций и вектор напряжений представим в виде

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11}\ \epsilon_{22}\ \epsilon_{12}\}; \quad \{\sigma\} = \{\sigma_{11}\ \sigma_{22}\ \sigma_{12}\}. \tag{7.7}$$

Потенциальную энергию подкрепленного элемента можно записать как сумму потенциальной энергии деформации элемента пластины или оболочки и энергии деформации ребер жесткости

$$V = \frac{1}{2} \iiint_W \{\sigma\}^T \{\epsilon\}\, dW + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} \int_F \int_l \sigma_{\text{p}}^{(n)} \epsilon_{\text{p}}^{(n)}\, dl\, dF, \tag{7.8}$$

где M – количество подкрепляющих ребер; l – длина ребра; F – площадь поперечного сечения ребра.

Работа внешних сил определяется из выражения

$$A = \iint_\Omega (P_1 u + P_2 v + P_3 w)\, d\Omega, \tag{7.9}$$

где P_i – проекции внешних сил на координатные оси x, y и z; Ω – область действия внешних сил.

После подстановки (6.9) в (7.8), принимая во внимание (6.8), приходим к окончательному выражению для потенциальной энергии рассматриваемого подкрепленного элемента

$$Э = V_0(u,\ v,\ w) + V_и(w) + V_р(u,\ v,\ w), \tag{7.10}$$

где

$$V_0(u,\ v,\ w) = \frac{1}{2} \iint_{x\,y} \left[D_{11}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w \right)^2 + D_{22}^0 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w \right)^2 + \right.$$
$$+ D_{12}^1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_{12} w \right)^2 + 2\nu_{12} D_{11}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \right.$$
$$\left. \left. - k_2 w \right) \right] dx\,dy; \tag{7.11}$$

$$V_и = \frac{1}{2} \iint_{x\,y} \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu_{12} D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_{12} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx\,dy; \tag{7.12}$$

$$V_{\text{p}}(u,\ v,\ w) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} \int_0^l \left[EF \left(\frac{\partial u}{\partial l} - k_{\text{p}} w \right)^2 - 2\eta EF \left(\frac{\partial u}{\partial l} - k_{\text{p}} w \right) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial^2 w}{\partial l^2} + EJ_{\text{p}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial l^2} \right)^2 \right] dl; \tag{7.13}$$

$$D_{11}^0 = \frac{E_{11} h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad D_{12}^1 = G_{12} h; \quad D_{22}^0 = \frac{E_{22} h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}};$$

$$D_{11} = \frac{E_{11} h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_{12} = \frac{G_{12} h^3}{12}; \quad D_{22} = \frac{E_{22} h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \tag{7.14}$$

h – толщина элемента.

Таким образом, составляющие потенциальной энергии выражены через перемещения точек срединной поверхности, что значительно облегчает процесс решения рассматриваемых задач.

В случае учета жесткости кручения ребра следует выражение (7.13) дополнить слагаемым

$$C_{\text{к}} \frac{\partial^2 w}{\partial l\, \partial n}, \tag{7.15}$$

где $C_{\text{к}}$ – жесткость балок при кручении; n – нормаль к плоскости наибольшей жесткости ребра.

Согласно предположению о том, что подкрепляющие ребра испытывают только осевое растяжение (сжатие) и изгиб в плоскости максимальной жесткости, потенциальная энергия деформации ребра представлена в виде

$$V_p = \frac{1}{2} \int\limits_l \left[EF \left(\frac{\partial u}{\partial l} - k_p w \right)^2 + EJ_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial l^2} \right)^2 - 2\eta EF \left(\frac{\partial u}{\partial l} - k_p w \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^2 w}{\partial l^2} \right] dl, \qquad (7.16)$$

где $J_p = J_0 + \eta^2 F$ представляет собой момент инерции ребра относительно оси, лежащей на поверхности соединения ребра и оболочки (пластины).

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛА. ОСОБЕННОСТИ АППРОКСИМАЦИИ

Построение матриц жесткости подкрепленных и неподкрепленных элементов, как уже говорилось выше, будет производиться на основе обобщенного функционала Лагранжа и общеизвестной процедуры (7.5). Сложность построения, а часто и громоздкость уточненных алгоритмов заставляют обращаться к более грубым, с точки зрения быстроты сходимости решения к точному, но более простым и экономичным на практике вариантам. Особенностью рассматриваемого алгоритма является вырождение границ совместности элементов в узлы совместимости. Это является следствием того, что условиям непрерывности функций необходимо удовлетворять лишь в узловых точках элементов.

§ 8. Дискретизация исходного функционала. Элементы функционала

Метод конечных элементов основан на идее аппроксимации непрерывной функции дискретной моделью, которая строится на конечном числе подобластей. В качестве функции элемента чаще всего применяется полином. Порядок полинома зависит от числа используемых в каждом узле элемента неизвестных. В общем случае эти функции должны удовлетворять условиям сходимости, о которых говорилось выше.

1. Функции и их производные до $(m-1)$-го порядка (где m – порядок старшей производной в функционале) должны быть непрерывны внутри каждого элемента и на границе между элементами. Непрерывность производных более высокого порядка, связанных с естественными граничными условиями, удовлетворяется в среднем путем включения соответствующих членов в вариационные формулировки.

2. При возрастании числа элементов производные, входящие в вариационную формулировку, должны стремиться к постоянным или, в частности, к нулевым значениям. Следовательно, необходимо включить в функцию те члены, которые могут обеспечить выполнение этих условий.

Таким образом, при использовании гармонического уравнения необходимо обеспечить непрерывность первого порядка, т. е. непрерывность самой функции, при применении бигармонического – непрерывность

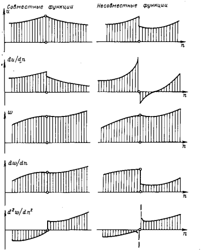


Рис. 9. Поведение функций в межэлементной зоне.

второго порядка, когда внутри каждого элемента и между ними требуется обеспечить непрерывность функции и ее первых производных. Эти обязательные требования вытекают из самой сути ограничений, накладываемых на величину энергии вследствие „прямого хода", заложенного в схему метода конечных элементов (рис. 9).

Схема „прямого хода" предполагает следующие операции:

$$u_i(x,\ y) \to \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \to J_1\left(u_i,\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) -$$

– при решении плоской задачи теории упругости;

$$w \to \left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) \to \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\right) \to J_2\left(w,\ \frac{\partial w}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\right) -$$

– при решении задач изгиба и так далее. Здесь предполагается, что индексы i, j пробегают значения от 1 до 2.

Поскольку дифференцированию подлежат лишь непрерывные функции, можно сказать, что требование соблюдения непрерывности низших производных функций есть порождение операций дифференцирования. Таким образом, можно сделать следующий вывод. Если не удается сформировать полностью совместный полином, то при формировании матриц жесткости необходимо стараться избегать операций явного дифференцирования разрывных функций. Учитывая это, в дальнейшем мы не будем производить последовательного дифференцирования искомых функций при определении высших производных.

Прежде чем перейти к изложению особенностей аппроксимации, обратимся к некоторому исходному функционалу

$$J = J\left(u_i,\ w,\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j},\ Q\right),\ i,\ j = 1, 2. \tag{8.1}$$

Пусть требуется найти функции двух независимых переменных $u_i(x,\ y)$, $w(x,\ y)$, определенные в области S с границей C.

Интеграл (8.1) представим суммой интегралов, принадлежащих области $S + C$:

$$J = \sum_{i=1}^{M} J_m, \tag{8.2}$$

где верхний предел M равен сумме искомых функций, их производных, компонентов внешней нагрузки и моментов.

Введем понятия элементов функционала e_m, за которые примем функции и их производные, включая высшие, стоящие под знаком интеграла в выражении (8.1), а также все компоненты внешнего воздействия:

$$
\left.
\begin{aligned}
&e_1 = u_1(x,\ y); &\quad& e_2 = u_2(x,\ y);\\
&e_3 = w(x,\ y); && e_4 = \frac{\partial u_1}{\partial x}(x,\ y);\\
&\cdots\cdots\cdots && \\
&\cdots\cdots\cdots && \\
&e_{M-2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x,\ y); && e_{M-1} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,\ y);\\
&e_M = Q(x,\ y). &&
\end{aligned}
\right\} \tag{8.3}
$$

Так как исходный функционал является квадратичным, то его можно представить в виде

$$
J = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} J_{ij}\,(a_{ij}\, e_i e_j). \tag{8.4}
$$

Таким образом мы пришли к позлементному представлению исходного функционала. Как и любая область представляется совокупностью различных простых элементов области, так и функционал равен сумме своих составляющих, каждая из которых равна интегралу по области $S + C$ от произведения некоторого множителя, постоянного в пределах элемента, на произведение двух соответствующих элементов исходного функционала. Для каждого элемента, характеризующего изменение некоторой функции или ее производных в пределах элемента, подбираются свои аппроксимирующие полиномы, удовлетворяющие условиям, которые рассмотрены ниже.

§ 9. Особенности аппроксимации элементов исходного функционала

Излагаемая методика построения матриц жесткости элементов заключается в раздельной аппроксимации самой функции и ее производных, входящих в функционал. В большинстве случаев используется симплексная функция, число коэффициентов в которой на единицу больше размерности координатного пространства, т. е. для двухмерного базисного треугольного элемента берется функция

$$
\varphi(x,\ y) = a_0 + a_1 x + a_2 y \tag{9.1}
$$

и для линейного элемента –

$$
\varphi(l) = \beta_0 + \beta_1 l. \tag{9.2}
$$

Здесь под l следует понимать координатную ось, направленную вдоль оси элемента. Предварительно на примере функционала

$$
Э = \frac{1}{2}\int_0^l \left[EJ\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + T\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - Qw \right] dx \tag{9.3}
$$

оценим сходимость решения на основе аппроксимации вида (9.1) по сравнению с решением, основанным на более строгой аппроксимации для прогиба балки, определяемой зависимостью [29]

$$
\begin{aligned}
w(x) = w_k &\left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k \left(x - 2\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}\right) + w_{k+1}\cdot \\
&\left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{k+1} \left(-\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}\right).
\end{aligned} \tag{9.4}
$$

Здесь w_k, $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k$, w_{k+1}, $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{k+1}$ – прогиб и углы поворота касательных к упругой линии в узловых точках.

Расчетная схема балки приведена на рис. 10. Для рассматриваемой задачи элементами функционала являются

$$
\left.
\begin{aligned}
&e_1^0 = w(x); \quad e_2^0 = \frac{\partial w}{\partial x}(x);\\
&e_3^0 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x); \quad e_4^0 = Q(x);\\
&e_5^0 = T(x).
\end{aligned}
\right\} \tag{9.5}
$$

Прямой метод решения характерен последовательными операциями

$$
w(x) \to \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \to \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),
$$

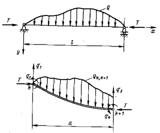


Рис. 10. Расчетная схема балки и ее конечного элемента.

в результате которых получим

$$e_2^0 = w_k\left(-6\frac{x}{a^2}+6\frac{x^2}{a^3}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k\left(1-4\frac{x}{a}+3\frac{x^2}{a^2}\right)+w_{k+1}\times$$

$$\left(6\frac{x}{a}-6\frac{x^2}{a^3}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{k+1}\left(-2\frac{x}{a}+3\frac{x^2}{a^2}\right); \tag{9.6}$$

$$e_3^0 = w_k\left(-6\frac{1}{a^2}+12\frac{x}{a^3}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k\left(-4\frac{1}{a}+6\frac{x}{a^2}\right)+w_{k+1}\times$$

$$\left(6\frac{1}{a^2}-12\frac{x}{a^3}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{k+1}\left(-\frac{2}{a}+6\frac{x}{a^2}\right)=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k\left(1-\frac{x}{a}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{k+1}\frac{x}{a}. \tag{9.7}$$

Будем считать, что T и Q постоянны в пределах элемента, т. е. $e_4^0 = Q$, $e_5^0 = T$. Индекс „нуль" указывает на вариант с повышенной точностью расчета, который, как известно, приводит к сходящемуся точному решению

при стремлении размеров элементов к нулю. При этом функционал стремится к своему минимальному значению $Э_0$.

Оценим погрешность, вносимую в решение, если для аппроксимации первого элемента функционала примем симплексную функцию (9.2),

$$e_1^* = w_k\left(1-\frac{x}{a}\right)+w_{k+1}\frac{x}{a}. \tag{9.8}$$

Выражения для e_2^0, e_3^0 оставим прежними, т. е. определяемыми зависимостями (9.6), (9.7). Тогда разность между значением функционала $Э_0$ и значением функционала с использованием (9.8) можно представить в следующем виде:

$$\frac{Q}{12}\sum_{m=1}^{M}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_m-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{m+1}\right]a^2, \tag{9.9}$$

где M – число конечных элементов.

Таким образом, можно записать

$$Э_0 - Э_0^* = \Delta(a^2), \tag{9.10}$$

где $Э_0^*$ – предельное значение функционала, когда применяется более грубая аппроксимация его элементов.

Затем представим, что

$$e_2^0 = e_2^* + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{k+1}+2\frac{w_k-w_{k+1}}{a}\right]\left(-3\frac{x}{a}+\right.$$

$$\left.+3\frac{x^2}{a^2}\right). \tag{9.11}$$

Здесь

$$e_2^* = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k\left(1-\frac{x}{a}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{k+1}\frac{x}{a}. \tag{9.12}$$

Раскладывая искомую функцию в окрестности некоторой точки в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми членами разложения, получаем

$$w_{k+1} = w_k + a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_k + \Delta (a^2). \qquad (9.13)$$

Из (9.13) следует, что

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_k = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{k+1} = \frac{w_{k+1} - w_k}{a} - \Delta (a).$$

Тогда выражение (9.11) примет вид

$$e_2^0 = e_2^* - \Delta (a) \left(-3 \frac{x}{a} + 3 \frac{x^2}{a^2} \right). \qquad (9.14)$$

Оценив разность значений функционалов при аппроксимациях (9.14) и $e_2 = e_2^*$, получим

$$Э_0 - Э_0^* = \Delta (a^2). \qquad (9.15)$$

Таким образом, применяя симплексные функции для аппроксимации элементов функционала, мы будем приближаться к истинному решению с погрешностью $\Delta (a^2)$ по сравнению со случаем более совершенной аппроксимации. Аналогичная ситуация сохранится и для более общего случая исследования напряженно-деформированного состояния для двухмерных областей.

При построении матриц жесткости двухмерных элементов будем исходить из аппроксимирующего полинома (9.1) для базисного треугольного элемента (рис. 11).

Для любого элемента исходного функционала, применив симплексную функцию, можно записать, что $e_m (x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$. В узлах базисного треугольного элемента элемент функционала e_m принимает значения

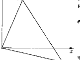


Рис. 11. Общий вид базисного треугольного элемента.

$$\left. \begin{aligned} & e_m (x_i, y_i) = e_{mi}; \; e_m (x_j, y_j) = e_{mj}; \\ & e_m (x_k, y_k) = e_{mk}. \end{aligned} \right\} \qquad (9.16)$$

Тогда, учитывая (9.16), можно записать, что

$$e_m (x, y) = e_{mi} Э_i (x, y) + e_{mj} Э_j (x, y) + e_{mk} Э_k (x, y), \qquad (9.17)$$

где $Э (x, y)$ – обычные функции Эрмита;

$$\left. \begin{aligned} & Э_i (x, y) = \frac{1}{2F} [y_{kj} (x - x_j) - x_{kj} (y - y_j)]; \\ & Э_j (x, y) = \frac{1}{2F} [y_{ji} (x - x_i) - x_{ji} (y - y_i)]; \\ & Э_k (x, y) = \frac{1}{2F} [y_{ik} (x - x_k) - x_{ik} (y - y_k)], \end{aligned} \right\} \qquad (9.18)$$

$2F = x_{kj} y_{ji} - x_{ji} y_{kj}$ – удвоенная площадь треугольника; $x_{ij} = x_i - x_j$; $x_{ji} = x_j - x_i$ и т. д.

Следует отметить полезные свойства базисного треугольного элемента и линейной интерполяции. Во-первых, используя треугольный элемент, можно сформировать элемент со сложной геометрией внешних границ (рис. 3). Во-вторых, так как исследуемые функции и их производные изменяются линейно вдоль границ элемента, то основное внимание концентрируется лишь на вопросе о корректности аппроксимирующих выражений для производных от искомых функций в узловых точках.

При этом, если эти выражения будут приближаться к точным своим значениям в узлах элемента, то в силу линейного закона аппроксимации не будут возникать те неопределенности, которые возникают при дифференцировании несовместных полиномов.

Подставив выражения типа (9.17) в (7.11) – (7.13) и проинтегрировав последние в пределах площади треугольного элемента, мы придем к обычному алгебраическому нелинейному выражению, содержащему неизвестные значения функций и их производных в узловых точках элемента.

Учитывая, что первые производные от тангенциальных составляющих перемещения и вторые производные от поперечной составляющей могут терпеть разрывы непрерывности, не следует вводить их в состав узловых неизвестных, т. е. они должны быть выражены непосредственно через значения искомой функции и низшие производные. Причем в этом случае должны быть отражены условия совместности. Но в отличие от „прямого хода", где условия совместности должны быть выполнены вдоль всей границы элемента, речь идет о их выполнении лишь в узловых точках.

В целях упрощения промежуточных и конечных выражений, а также в соответствии с введенными в предыдущем параграфе понятиями элементов функционала примем единую систему обозначений, независимых от конкретной решаемой задачи:

$$\left.\begin{aligned}
&e_{1n} = u_n = q_{1n};\quad e_{2n} = v_n = q_{2n};\\
&e_{3n} = w_n = q_{3n};\\
&e_{4n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_n;\quad e_{5n} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_n;\\
&e_{6n} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_n;\quad e_{7n} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_n;\\
&e_{8n} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_n = q_{4n};\quad e_{9n} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_n = q_{5n};\\
&e_{10n} = \theta_n = q_{6n};\\
&e_{11n} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_n;\quad e_{12n} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_n;\\
&e_{13n} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_n;\quad e_{14n} = Q_n.
\end{aligned}\right\}\tag{9.19}$$

Здесь индекс n характеризует номер узла элемента.

Для ребер жесткости используются аналогичные обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&e^{\mathrm{p}}_{1n} = u_{\mathrm{p}n};\quad e^{\mathrm{p}}_{2n} = u_{\mathrm{p}n};\\
&e^{\mathrm{p}}_{3n} = w_{\mathrm{p}n};\quad e^{\mathrm{p}}_{4n} = \left(\frac{\partial u_{\mathrm{p}}}{\partial l}\right)_n;\\
&e^{\mathrm{p}}_{5n} = \left(\frac{\partial w_{\mathrm{p}}}{\partial l}\right)_n;\quad e^{\mathrm{p}}_{6n} = \left(\frac{\partial^2 w_{\mathrm{p}}}{\partial l^2}\right)_n.
\end{aligned}\right\}\tag{9.20}$$

В систему обозначений (9.19) введены параметры q_{mn}, ($m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), которые являются неизвестными в узловых точках при решении наиболее общей из рассматриваемых ниже задач, т. е. полный вектор неизвестных для n-го узла будет иметь вид

$$\{q\}_n = \{q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6\}_n. \tag{9.21}$$

При рассмотрении частных задач он может быть сокращен, но последовательность нумерации узловых значений неизвестных мы сохраним неизменной. В силу замечаний, сделанных выше, в дальнейшем узловые значения элементов функционала e_{4n}, e_{5n}, e_{6n}, e_{7n}, e_{11n}, e_{12n}, e_{13n}, e^{p}_{4n}, e^{p}_{6n} должны быть выражены через узловые значения элементов функционала более низкого порядка: q_{1n}, q_{2n}, q_{3n}, q_{4n}, q_{5n}, q_{6n}.

Таким образом, поскольку функции $Э(x, y)$ определены единственным образом, *то в общем случае при решении частных задач варьированию* подлежат лишь узловые значения основных неизвестных q_{mn}, непрерывность которых в узловых точках обеспечивается.

В данном случае можно провести аналогию между предлагаемым приемом и идеей, заложенной в методе конечных элементов. В начале прошлого века Навье сформулировал общую задачу расчета упругой конструкции как задачу определения перемещений во всех точках конструкций, т. е. такого вектора $\varphi(x, y, z)$, который удовлетворяет уравнениям теории упругости и граничным условиям. Правда, найти эту функцию оказалось непросто. Для тел относительно простой формы это научились делать с помощью приближенных методов Ритца, Бубнова–Галеркина и ряда других. Однако применить их к более сложным телам не удавалось. Решение нашли в ответе на вопрос: обязательно ли во всем объеме тела функция $\varphi(x, y, z)$ должна иметь одно и то же аналитическое представление. Быть может, область, занимаемую телом, можно разбить на подобласти, в каждой из которых деформированное состояние является достаточно простым, а затем „сшить" из этих подобластей полную область? Эта простая идея оказалась чрезвычайно плодотворной и была положена в основу МКЭ.

То же самое используется и в предлагаемом приеме. Если в функционал входит некоторая функция и ее производные, то с помощью элементарных полиномов предлагается аппроксимировать функцию и ее производные. Причем аппроксимация применяется независимая, т. е. используется принцип суперпозиции.

§ 10. Построение конечных аналогов дифференциальных операторов

В число элементов исходного функционала входят высшие производные от искомых функций u, v и w. Прежде чем пытаться выражать их через узловые значения функций и производные более низкого порядка, необходимо получить выражения для высших производных от координатных функций, справедливых при любой форме конечного элемента. В отличие от традиционного подхода, когда производные от функции находятся в пределах всей области элемента, в рассматриваемом случае задача сводится к определению их лишь в узловых точках, так как порядок их изменения в поле элемента предопределен самой координатной функцией. С этой целью рассмотрим область, представленную совокупностью элементов, и выделим для рассмотрения один из них (рис. 12). Начало координат поместим в точку i и будем считать, что координатная плоскость совпадает с плоскостью элемента. Вид элемента в данном случае не играет особой роли. Поэтому зависимости, полученные ниже, будут справедливы для произвольного m-угольника.

Основой определения конечных зависимостей для частных производных от функции в некотором узле служит выражение для производной сложной функции от нескольких переменных:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}; \tag{10.1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}; \tag{10.2}$$

$$x = x(\xi,\eta); \quad y = y(\xi,\eta); \tag{10.3}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\times$$

$$\times\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\xi} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2. \tag{10.4}$$

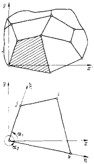


Рис. 12. К построению конечных аналогов дифференциальных операторов.

Зависимость для $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}$ следует из (10.4), если произвести замену $x \to y$, $\xi \to \eta$. Полагая, что x и y являются независимыми функциями от ξ и η и рассматривая элементы с прямолинейными сторонами контура, выражениям (10.1) - (10.4) можно придать следующий вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\alpha_1; \tag{10.5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\alpha_2; \tag{10.6}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cos^2\alpha_1 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cos\alpha_1\sin\alpha_1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\sin^2\alpha_1;\\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cos^2\alpha_2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cos\alpha_2\sin\alpha_2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\sin^2\alpha_2.
\end{aligned}\right\} \tag{10.7}$$

Выражения для первых частных производных в i-м узле. Воспользовавшись выражениями (10.5), (10.6) и полагая, что начало координат *совпадает с узлом* i, *можно записать:*

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_i &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_i\cos\alpha_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_i\sin\alpha_1;\\
\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_i &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_i\cos\alpha_2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_i\sin\alpha_2.
\end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

Тогда, решая (10.8), находим

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_i &= \frac{1}{\Delta_i}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_i\sin\alpha_2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_i\sin\alpha_1\right];\\
\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_i &= \frac{1}{\Delta_i}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_i\cos\alpha_1 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_i\cos\alpha_2\right],
\end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

где

$$\Delta_i = \cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1. \tag{10.10}$$

При исследовании напряженно-деформированного состояния подкрепленных пластин и оболочек приходится иметь дело с первыми частными производными от тангенциальных перемещений u и v. Тогда, полагая справедливыми тождества $\varphi \equiv u(v)$, легко получить выражения для первых частных производных от $u(v)$ для некоторого i-го узла. В отличие от обычно применяемой процедуры в МКЭ в данном случае будем аппроксимировать перемещения только лишь вдоль прямых линий, соединяющих узлы элемента.

Тангенциальные составляющие перемещения u и v представим полиномами первой степени (рис. 13):

$$\left.\begin{aligned} u_\xi &= u_i\left(1-\frac{\xi}{l_{ij}}\right)+u_j\frac{\xi}{l_{ij}}; \quad u_\eta = u_i\left(1-\frac{\eta}{l_{ik}}\right)+u_k\frac{\eta}{l_{ij}};\\ v_\xi &= v_i\left(1-\frac{\xi}{l_{ij}}\right)+v_j\frac{\xi}{l_{ij}}; \quad v_\eta = v_i\left(1-\frac{\eta}{l_{ik}}\right)+v_k\frac{\eta}{l_{ik}}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.11)$$

где l_{ij}, l_{ik} – размеры граней элемента между узлами i, j и i, k соответственно. Учитывая, что

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= x_{ji}/l_{ij}; \; \sin\alpha_1 = y_{ji}/l_{ij};\\ \cos\alpha_2 &= x_{ki}/l_{ki}; \; \sin\alpha_2 = y_{ki}/l_{ki}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.12)$$

где

$$x_{mn} = x_m - x_n; \quad y_{mn} = y_m - y_n, \qquad (10.13)$$

легко получить для i-го узла

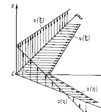


Рис. 13. Характер изменения тангенциальных составляющих полного перемещения по границе элемента.

$$\{e_u\} = [A]_i\,\{q_u\}; \{e_v\} = [A]_i\,\{q_v\}. \qquad (10.14)$$

В данном случае матрицы имеют следующий вид:

$$[A]_i = \frac{1}{\Delta_i}\begin{bmatrix} y_{kj} & y_{ik} & y_{ji} \\ x_{jk} & x_{ki} & x_{ij} \end{bmatrix}; \qquad (10.15)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_i &= x_{ki}\,y_{ji} - x_{ji}\,y_{ki};\\ \{e_u\} &= \{e_{4i},\ e_{5i}\};\\ \{e_v\} &= \{e_{6i},\ e_{7i}\},\\ \{q_u\} &= \{q_{1i}\ q_{1j}\ q_{1k}\};\\ \{q_v\} &= \{q_{2i}\ q_{2j}\ q_{2k}\} \end{aligned}\right\} \qquad (10.16)$$

При реализации машинного алгоритма целесообразно вводить полный вектор узловых неизвестных для элемента, который имеет следующий вид:

$\{q\} = \{\{q\}_i\ \{q\}_j\ \{q\}_k\}$ – для треугольного элемента;

$\{q\} = \{\{q\}_i\ \{q\}_j\ \{q\}_k\ \{q\}_l$ – для четырехугольного элемента.

Содержание узловых векторов $\{q\}_m$ определяется видом решаемой задачи:

$\{q\}_m = \{q_1\ q_2\}_m$ – при решении плоской задачи теории упругости;

$\{q\}_m = \{q_3\ q_4\ q_5\ q_6\}_m$ – при решении задач изгиба пластин;

$\{q\}_m = \{q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6\}_m$ – при исследовании поведения подкрепленных элементов конструкций.

Введя полный вектор узловых неизвестных, необходимо перестроить матрицу $[A]_i$, что делается элементарно.

Тогда зависимости (10.14) будут иметь вид

$$\{e_u\} = [A_u]_i\,\{q\}; \quad \{e_v\} = [A_v]_i\,\{q\}. \qquad (10.17)$$

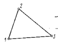
В дальнейшем будут использованы выражения, записанные для конкретной частной производной от функции в узловой точке и следующие из (10.17):

$$\left.\begin{aligned} e_{4i} &= [A_4]_i\,\{q\}; \quad e_{5i} = [A_5]_i\,\{q\};\\ e_{6i} &= [A_6]_i\,\{q\}; \quad e_{7i} = [A_7]_i\,\{q\}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.18)$$

Для самого общего случая, когда вектор $\{q\}$ имеет размерность 6 x 4, т. е. при исследовании поведения подкрепленных конструкций с привлечением четырехугольных элементов, матрицы-строки, входящие в систему (10.18), имеют вид

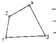
$$\left.\begin{aligned} [A_4]_i &= \frac{1}{\Delta_i}[y_{kj}\ 0\,0\,0\,0\,0\ y_{ik}\ 0\,0\,0\,0\,0\ y_{ji}\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0];\\ [A_5]_i &= \frac{1}{\Delta_i}[x_{jk}\ 0\,0\,0\,0\,0\ x_{ki}\ 0\,0\,0\,0\,0\ x_{ij}\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0];\\ [A_6]_i &= \frac{1}{\Delta_i}[0\ y_{kj}\ 0\,0\,0\,0\,0\ y_{ik}\ 0\,0\,0\,0\,0\ y_{ji}\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0];\\ [A_7]_i &= \frac{1}{\Delta_i}[0\ x_{jk}\ 0\,0\,0\,0\,0\ y_{ki}\ 0\,0\,0\,0\,0\ x_{ij}\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0]. \end{aligned}\right\} \qquad (10.19)$$

Таблица 2 Таблица индексов для треугольного элемента

Схема элемента	Номер узла в начале координат	Текущие значения индексов i	j	k
	1	1	2	3
	2	2	1	3
	3	3	2	1

Все предыдущие рассуждения велись относительно i-й узловой точки. Перенеся начало координат в следующий узел, получаем аналогичные выражения для частных производных в другой узловой точке элемента. Для исключения ошибки рекомендуется использовать зеркальное отображение канонического варианта, для которого выше уже получены основные зависимости. В этом случае, если обозначить вершины элементов арабскими цифрами, индексы в зависимостях (10.14)→(10.19) принимают числовые значения, определяемые по табл. 2 и 3. Следует иметь в виду, что при переходе от узла к узлу индексы меняют свои значения во всех матрицах и векторах, входящих в матричные выражения.

Таблица 3. Таблица индексов для четырехугольного элемента

Схема элемента	Номер узла в начале координат	Текущие значения индексов i	j	k	l
	1	1	2	3	4
	2	2	1	4	3
	3	3	4	1	2
	4	4	3	2	1

В первых столбцах табл. 2 и 3 отражены схема элемента и принятый порядок обозначения узлов. Цифры вторых столбцов указывают на номер узла, совпадающего с началом координат. В остальных столбцах приведены значения, которые принимают индексы i, j, k, l в канонических выражениях для частных производных при совмещении начала координат с соответствующим узлом.

Канонические выражения для определения вторых частных производных в i-м узле. При построении конечных аналогов дифференциальных операторов второго порядка возможны два подхода. Один из них заключается в применении трехузловой схемы, которая была использована выше. Второй путь состоит в использовании четырехузловой схемы.

Т р е х у з л о в а я с х е м а. Исключив из выражений (10.7) смешанную производную, используя (10.9), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_i \cos\alpha_1 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_i \sin\alpha_1; \\ \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_i \cos\alpha_2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_i \sin\alpha_2. \end{aligned}\right\} \qquad (10.20)$$

Полагая, что углы поворота $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ изменяются линейно вдоль сторон элемента, получаем выражение для смешанной производной

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_i = \frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_j - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i\right]\frac{1}{y_{ji}} + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_k - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i\right]\frac{1}{x_{ki}} + \frac{x_{ij}}{y_{ji}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_i + \frac{y_{ki}}{x_{ki}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_i\right\}. \qquad (10.21)$$

После исключения смешанной производной система (10.7) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right)_i = 2\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_i \cos\alpha_1 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_i \cos^2\alpha_1 + \\ + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_i \sin^2\alpha_1; \end{aligned}\right\} \qquad (10.22)$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)_i &= 2\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_i \cos\alpha_2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_i \cos^2\alpha_2 - \\ &- \left(\frac{\partial^2 w}{dy^2}\right)_i \sin^2\alpha_2 .\end{aligned}\right\} \qquad (10.22)$$

Аппроксимируя нормальную составляющую перемещения по направлениям ξ и η полиномами третьей степени: $w(l) = c_0 + c_1 l + c_2 l^2 + c_3 l^3$, где $l \equiv \xi$, η; c_i – произвольные параметры, подлежащие определению из условий совместности в узловых точках, можно записать

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)_i = 6(w_j - w_i)\frac{\cos^2\alpha_1}{x_{ji}^2} - 4\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \frac{\cos^2\alpha_1}{x_{ji}} - 4\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \times$$

$$\times \frac{\sin^2\alpha_1}{y_{ji}} - 2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_j \frac{\cos^2\alpha_1}{x_{ji}} - 2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_j \frac{\sin^2\alpha_1}{y_{ji}}; \qquad (10.23)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)_i = 6(w_k - w_i)\frac{\cos^2\alpha_2}{x_{ki}^2} - 4\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \frac{\cos^2\alpha_2}{x_{ki}} - 4\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \times$$

$$\times \frac{\sin^2\alpha_2}{y_{ki}} - 2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k \frac{\cos^2\alpha_2}{x_{ki}} - 2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_k \frac{\sin^2\alpha_2}{y_{ki}}. \qquad (10.24)$$

Подставив (10.23), (10.24) в систему (10.22), получим

$$e_{11i} = [A_{11}]_i \; \{q\}; \; e_{12i} = [A_{12}]_i \; \{q\}; \qquad (10.25)$$

$$e_{13i} = [A_{13}]_i \; \{q\}.$$

Для треугольного элемента матрицы-строки, входящие в (10.25), имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}[A_{11}]_i &= \frac{1}{\delta_i}\,[0\,0\,A_i^x\,B_i^x\,C_i^x\,0\,0\,0 \\ &A_j^x\,B_j^x\,C_j^x\,0\,0\,0\,A_k^x\,B_k^x\,C_k^x\,0]; \\ [A_{13}]_i &= \frac{1}{\delta_i}\,[0\,0\,A_i^y\,B_i^y\,C_i^y\,0\,0\,0 \\ &A_j^y\,B_j^y\,C_j^y\,0\,0\,0\,A_k^y\,B_k^y\,C_k^y\,0],\end{aligned}\right\} \qquad (10.26)$$

где

$$\delta_i = x_{ij}^2 y_{ik}^2 - y_{ji}^2 x_{ik}^2. \qquad (10.27)$$

При использовании четырехугольного элемента данные матрицы следует дополнить шестью нулевыми элементами, так как вектор узловых неизвестных дополнится неизвестными для четвертой узловой точки.

Параметры, входящие в (10.26), определяются следующими зависимостями:

$$\left.\begin{gathered} A_i^x = 6(y_{ki}^2 + y_{ji}^2); \;\; B_j^x = 4x_{ji}y_{ki}^2; \\ B_i^x = 2(x_{ji}y_{ki}^2 + 2x_{ki}y_{ji}^2); \;\; C_j^x = 2y_{ji}y_{ki}^2; \\ C_i^x = 2y_{ki}y_{ji}(2y_{ki} + y_{ji}); \;\; A_k^x = -6y_{ji}^2; \\ C \\ A_j^x = -6y_{ki}^2; \;\; B_k^x = 2x_{ki}y_{ji}^2; \\ C_k^x = 4y_{ki}y_{ji}^2; \end{gathered}\right\} \qquad (10.28)$$

$$\left.\begin{gathered} A_i^y = 6(x_{ki}^2 + x_{ji}^2); \;\; B_j^y = 4x_{ji}x_{ki}^2; \\ B_i^y = 2x_{ji}x_{ki}(2x_{ji} + x_{ki}); \;\; C_j^y = 2y_{ji}x_{ki}^2; \\ C_i^y = 2(x_{ji}^2 y_{ki} + 2x_{ki}^2 y_{ji}); \;\; A_k^y = -6x_{ji}^2; \\ A_j^y = -6x_{ki}^2; \;\; B_k^y = 2x_{ki}x_{ji}^2; \\ C_k^y = 4y_{ki}x_{ji}^2. \end{gathered}\right\} \qquad (10.29)$$

Опыт реализации излагаемой методики показывает, что при определении выражения для смешанной производной лучше пользоваться не выражением (10.21), а выражением, следующим из предположения о линейности углов поворота по границам рассматриваемого элемента. Тогда для i-го узла треугольного элемента можно записать, что

$$[A_{12}]_i = \frac{1}{2\Delta_i}\,[0\,0\,0\,B_i^{xy}\,C_i^{xy}\,0\,0\,0\,0\,B_j^{xy}\,C_j^{xy}\,0\,0\,0\,0\,B_k^{xy}\,C_k^{xy}\,0], \qquad (10.30)$$

где

$$\left.\begin{gathered} B_i^{xy} = y_{kj}; \;\; C_i^{xy} = x_{ki}; \\ C_i^{xy} = x_{jk}; \;\; B_k^{xy} = y_{ji}; \\ B_j^{xy} = y_{ik}; \;\; C_k^{xy} = x_{ij}. \end{gathered}\right\} \qquad (10.31)$$

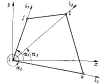


Рис. 14. К построению четырехузловой схемы определения частных производных функций в узловых точках.

Для четырехугольного элемента матрица (10.30), так же как матрицы (10.26), (10.27), должна быть дополнена нулевыми элементами.

Четырехузловая схема. Четырехузловая схема может быть использована при определении вторых частных производных от искомой функции в узловых точках четырехугольного элемента. Для этого необходимо рассмотреть три отрезка прямых, сходящихся в одном узле (рис. 14).

По аналогии с предыдущим запишем

$$\{e_w^l\} = [C]_i \{e_w\}, \qquad (10.32)$$

где

$$\left\{e_w^l\right\} = \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial l_1^2}\right)_i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial l_2^2}\right)_i \left(\frac{\partial^2 w}{\partial l_3^2}\right)\right\};$$

$$\{e_w\} = \{e_{11i} \ \ e_{12i} \ \ e_{13i}\};$$

$$[C]_i = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha_1 & 2\cos\alpha_1\sin\alpha_1 & \sin^2\alpha_1 \\ \cos^2\alpha_2 & 2\cos\alpha_2\sin\alpha_2 & \sin^2\alpha_2 \\ \cos^2\alpha_3 & 2\cos\alpha_3\sin\alpha_3 & \sin^2\alpha_3 \end{bmatrix} \qquad (10.33)$$

Из (10.32) следует

$$\{e_w\}_i = [C]_i^{-1}\{e_w^l\}_i. \qquad (10.34)$$

Вектор $\{e_w^l\}$ можно представить в виде матричного произведения

$$\{e_w^l\} = [B]_i \{q\}, \qquad (10.35)$$

где $\{q\}$ – полный вектор неизвестных для четырехугольного элемента.

Размерность матрицы $[B]_i$ определяется размерностью вектора $\{q\}$. Для случая, когда вектор неизвестных состоит из 24 определяемых параметров, матрица $[B]_i$ имеет вид

$$[B]_i = \lfloor [a]\ [b]\ [c]\ [d] \rfloor, \qquad (10.36)$$

где

$$\left.\begin{aligned} [a] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 & 4x_{ij} & 4y_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4x_{ik} & 4y_{ik} & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4x_{il} & 4y_{il} & 0 \end{bmatrix}; \\ [b] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 2x_{ij} & 2y_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ [c] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2x_{ik} & 2y_{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ [d] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2x_{il} & 2y_{il} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.37)$$

Обратная матрица $[C]^{-1}$ в развернутом виде может быть представлена совокупностью матриц-столбцов

$$[C]^{-1} = \{\{C_1\}\ \{C_2\}\ \{C_3\}\}. \qquad (10.38)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} \{C_1\} &= \frac{1}{\delta_i}\begin{Bmatrix} 2y_{li}y_{ki}(x_{li}y_{ki} - x_{ki}^2 y_{li}^2) \\ x_{ki}^2 y_{li}^2 - y_{ki}^2 x_{li}^2 \\ 2x_{li}x_{ki}(x_{li}y_{ki} - x_{ki}y_{li}) \end{Bmatrix}; \\ \{C_2\} &= \frac{1}{\delta_i}\begin{Bmatrix} 2y_{ji}y_{li}(x_{ji}y_{li} - x_{li}y_{ji}) \\ x_{li}^2 y_{ji}^2 - x_{ji}^2 y_{li}^2 \\ 2x_{ji}x_{li}(x_{ji}y_{li} - x_{li}y_{ji}) \end{Bmatrix}; \end{aligned}\right\} \qquad (10.39)$$

$$\{C_3\} = \frac{1}{\delta_i} \begin{Bmatrix} 2y_{ji}y_{ki}(x_{ki}y_{ji} - x_{ji}y_{ki}) \\ x_{ji}^2 y_{ki}^2 - x_{ki}^2 y_{ji}^2 \\ \\ 2x_{ji}x_{ki}(x_{ki}y_{ji} - x_{ji}y_{ki}) \end{Bmatrix};$$

$$\delta_i = 2[x_{ji}^2 y_{ki} y_{li}(x_{li}y_{ki} - x_{ki}y_{li}) + x_{ki}^2 y_{li} y_{ji}(x_{ji}y_{li} - x_{li}y_{ji}) + $$
$$+ x_{li}^2 y_{ki} y_{ji}(x_{ki}y_{ji} - x_{ji}y_{ki})]. \qquad (10.40)$$

В большинстве случаев, особенно когда четырехугольник по форме близок к прямоугольному элементу, четырехузловая схема хороша для определения e_{11}, e_{13}. Для определения смешанной производной e_{12} лучше пользоваться выражениями (10.25), (10.30). Отметим и некоторые особенности трехузловой схемы при использовании четырехузловых элементов. При построении матриц жесткости используется базисный треугольный элемент. Тогда, представляя четырехугольный элемент суммой двух треугольных (рис. 15, *а*) и определяя производные e_4, e_5, e_6, e_7, e_{11}, e_{12}, $_{13}$ по трехузловой схеме, мы столкнемся с ситуацией, когда конечно-элементная модель конструкции из изотропного материала может приобрести анизотропные свойства. Исключить указанный дефект расчетной модели можно с помощью повторной триангуляции (рис. 15, *б*) и наложения полученных результатов. Но, если углы между двумя направлениями базисного треугольника будут малы, то точность трехузловой схемы падает. Улучшить результаты можно, применив следующий прием. Допустим, для узла i треугольника IV (рис. 15, *б*) строится трехузловая схема. Тогда за исходные направления следовало бы брать направления, совпадающие с прямыми, соединяющими узлы i, j и i, l. Но угол между ними может быть мал, что приведет к повышенной погрешности. Поэтому целесообразно, работая с треугольником IV, за исходные направления брать те, которые совпадают с прямыми, соединяющими узлы i, j и i, k четырехугольного элемента. Аналогично поступают и при определении производных от искомых функций в других узловых

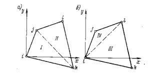


Рис. 15. Схема двойной триангуляции при построении матрицы жесткости четырехугольного элемента.

точках. Такой прием исключает возможность возникновения искусственной анизотропии свойств для прямоугольного элемента, даже при использовании одинарной триангуляции. Совмещение достоинств двойной триангуляции и последнего приема дает положительные результаты.

§ 11. Аппроксимация компонентов перемещения точек подкрепляющих ребер

Ребра жесткости, подкрепляющие конструкцию, могут быть произвольно расположенными. Но при дискретизации конструкции необходимо предусмотреть, чтобы элементы ребер окаймляли тот или иной элемент и не проходили где-то в его поле. Это условие позволяет жестко связать перемещения точек ребра с перемещениями кромок элемента, для которых аппроксимирующие полиномы уже выбраны. Однозначность аппроксимирующих полиномов приводит и к однозначности выражений для частных производных по направлениям, совпадающим с осями ребер. Рассмотрим ребро, произвольно ориентированное в плоскости xOy (рис. 16). Тогда полиномы, аппроксимирующие компоненты перемещения точек ребра, могут быть выбраны в виде

$$u_p(l) = u_{ip}\left(1 - \frac{l}{l_p}\right) + u_{jp}\frac{l}{l_p}$$

– для аппроксимации продольного перемещения;

$$w(l) = \sum_{s=1}^{4} q_s Э_s(l)$$

– для аппроксимации перемещений точек в поперечном направлении.

Здесь приняты следующие обозначения:

$$q_1 = w_{pi}; \; q_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial l}\right)_{pi};$$

$$q_3 = w_{pj}; \; q_4 = \left(\frac{\partial w}{\partial l}\right)_{pj};$$

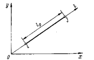


Рис. 16. Элемент ребра жесткости.

$$Э_1(l) = 1 - 3\frac{l^2}{l_р^2} + 2\frac{l^3}{l_р^3}; \quad Э_2(l) = l - 2\frac{l^2}{l_р} + \frac{l^3}{l_р^2};$$

$$Э_3(l) = 3\frac{l^2}{l_р^2} - 2\frac{l^3}{l_р^3}; \quad Э_4(l) = -\frac{l^2}{l_р} + \frac{l^3}{l_р^2}.$$

Частные производные по направлениям x и y легко определяются с помощью зависимостей (10.10), т. е. переход к общей системе координат не вызывает затруднений.

§ 12. Критерии сходимости при независимой аппроксимации элементов функционала

Прежде чем сформулировать основные критерии сходимости, восстановим особенности аппроксимации, принятой в излагаемом алгоритме:

А. Используется независимая аппроксимация искомых функций и их производных с помощью единообразных координатных функций.

Б. Принятый характер аппроксимации требует выполнения условий совместности только в узловых точках элемента.

Тогда в соответствии с отмеченным выше сформулируем основные критерии сходимости, выполнение которых должно быть обязательным:

1. Координатные функции должны быть линейно независимыми и основаны на полном полиноме n-й степени.

2. Координатные функции для компонентов полного перемещения должны обеспечивать геометрически возможные перемещения в пределах всего элемента с сохранением условий непрерывности самих функций по границам со смежными элементами.

3. Координатные функции, характеризующие закон изменения m-й производной от искомой функции в пределах элемента, могут быть установлены независимо от функции, дающей распределение в пределах элемента $(m-1)$-й производной. При этом должны быть выполнены следующие обязательные условия:

а) координатные функции m-й производной от искомой функции должны отражать естественный характер деформирования и стремиться к постоянному значению при уменьшении сторон элемента;

б) выражения для m-й производной от искомой функции в узловых точках должны давать значения, стремящиеся к точным, при уменьшении сторон элемента;

в) при узловых перемещениях, отвечающих условию постоянной деформации, это состояние должно реализоваться в элементе;

г) при узловых перемещениях элемента, вызванных его смещением как жесткого тела, не должна возникать деформация элемента.

Изложенные условия идентичны условиям сходимости, о которых говорилось выше. Но здесь не фигурирует необходимость соблюдения непрерывности $(m-1)$-х производных по границам элемента, если высшая производная m-го порядка. Использование этой аппроксимации освобождает нас от соблюдения этого условия и резко упрощает процесс построения матриц жесткости.

ПРОСТЕЙШИЕ СХЕМЫ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

§ 13. Линейная и квазилинейная аппроксимации элементов функционала

Выше отмечалась сложность получения аппроксимирующих полиномов для функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ и $w(x, y)$, удовлетворяющих всем условиям сходимости. Если допустить, что она преодолена, то, даже в этом случае, процесс программирования алгоримта формирования матриц жесткости может быть довольно громоздким и трудоемким. Прежде всего это связано с большим количеством операций дифференцирования и интегрирования функций в пределах области произвольного вида.

Рассмотрим этот путь формирования матриц жесткости на примере использования функционала

$$
\begin{aligned}
2Э(u, v, w) = \int_x\int_y \Bigg[& D_{11}^0\left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w\right)^2 + D_{22}^0\left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w\right)^2 + 2D_{12}^0 \times \\
& \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w\right) + D_{12}^1\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + D_{11}^1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \\
& + D_{22}^1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2D_{12}^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4D_{12}^3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - 2Q_x u - 2Q_y v - \\
& - 2Q_z w\Bigg] dx dy, \qquad (13.1)
\end{aligned}
$$

следующего из (7.11), (7.12).

Если рассматривать элемент треугольной формы и в качестве вектора узловых неизвестных принять $\{q\}_i = \{q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\}$, то можно записать, что

$$
\left.
\begin{aligned}
e_1 &= u(x, y) = \sum_{i=1}^{15} \mathcal{F}_i^u(x, y) q_i; \\
e_2 &= v(x, y) = \sum_{i=1}^{15} \mathcal{F}_i^v(x, y) q_i; \\
e_3 &= w(x, y) = \sum_{i=1}^{15} \mathcal{F}_i^w(x, y) q_i.
\end{aligned}
\right\} \qquad (13.2)
$$

Тогда энергию деформации треугольного элемента легко представить в виде

$$
Э(u, v, w) = \sum_{m=1}^{15}\sum_{n=1}^{15} k_{mn} q_m q_n, \qquad (13.3)
$$

где

$$
\begin{aligned}
k_{mn} = \int_x\int_y \Bigg[& D_{11}^0 \frac{\partial \mathcal{F}_m^u}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{F}_n^u}{\partial x} + D_{22}^0 \frac{\partial \mathcal{F}_m^v}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{F}_n^v}{\partial y} + D_{12}^0\left(\frac{\partial \mathcal{F}_m^u}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{F}_n^v}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}_u^n}{\partial x} \times \right. \\
& \left. \times \frac{\partial \mathcal{F}_m^v}{\partial y}\right) + D_{12}^1\left(\frac{\partial \mathcal{F}_m^u}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{F}_n^u}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}_m^u}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{F}_n^v}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_n^u}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{F}_m^v}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_m^v}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{F}_n^v}{\partial x}\right) - \\
& - (D_{11}^0 k_1 + D_{12}^0 k_2)\left(\frac{\partial \mathcal{F}_m^u}{\partial x}\mathcal{F}_n^w + \frac{\partial \mathcal{F}_n^u}{\partial x}\mathcal{F}_m^w\right) - (D_{22}^0 k_2 + D_{12}^0 k_1)\left(\frac{\partial \mathcal{F}_m^v}{\partial y}\mathcal{F}_n^w + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \mathcal{F}_n^v}{\partial y}\mathcal{F}_m^w\right) + (D_{11}^0 k_1^2 + 2D_{12}^0 k_1 k_2 + D_{22}^0 k_2^2)\mathcal{F}_m^w \mathcal{F}_n^w + D_{11}^1 \frac{\partial^2 \mathcal{F}_m^w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}_n^w}{\partial x^2} + \\
& + D_{12}^2\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}_m^w}{\partial x^2}\frac{d^2 \mathcal{F}_n^w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_n^w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}_m^w}{\partial y^2}\right) + 4D_{12}^3 \frac{\partial^2 \mathcal{F}_m^w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \mathcal{F}_n^w}{\partial x \partial y} + D_{22}^1 \times \\
& \times \frac{\partial^2 \mathcal{F}_m^w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}_n^w}{\partial y^2}\Bigg] dx dy. \qquad (13.4)
\end{aligned}
$$

Коэффициенты k_{mn} являются элементами исходной матрицы жесткости. Для их получения необходимо предусмотреть специальный алгоритм формирования выражений вида (13.2). В случае элементов произвольной треугольной или четырехугольной формы возникает необходимость решения системы уравнений для определения коэффициентов полиномов. Затем необходимо запрограммировать и осуществить машинные операции дифференцирования этих функций и, наконец, произвести операции интегрирования. В этом случае возможно как точное, так и численное интегрирование. Но так или иначе, необходимо отметить, что несмотря на возможность полностью автоматизировать процесс формирования матриц жесткости, рассмотренный алгоритм имеет недостаток. Дело в том, что для выполнения всех операций, необходимых при построении матриц жесткости, требуется большая затрата машинного времени. В первую очередь это связано с процессом построения нескольких полиномов для перемещений, необходимостью дифференцирования и интегрирования большого числа функций.

Алгоритм, предложенный во второй главе, в большинстве случаев свободен от этих недостатков. Рассмотрим первые два варианта построения матриц жесткости элементов.

В целях простоты изложения будем рассматривать процесс построения матриц на примере решения плоской задачи теории упругости и задач изгиба пластин. Алгоритм формирования матрицы жесткости оболочки будет изложен ниже.

Первый вариант. Линейная аппроксимация элементов функционала. Такой вид аппроксимации может применяться в случае использования элементов треугольной формы (см. рис. 11). При решении плоской задачи теории упругости исходный функционал имеет вид

$$Э(u,\ v) = \frac{1}{2} \int_x \int_y [D_{11}^0 e_4^2 + 2D_{12}^0 e_4 e_7 + D_{22}^0 e_7^2 + D_{12}^1 (e_5 + e_6)^2]\, dxdy. \tag{13.5}$$

В пределах рассматриваемого треугольника введем следующие аппроксимации:

$$e_R = A_{0R} + A_{1R}x + A_{2R}y, \tag{13.6}$$

где A_0, A_1, A_2 будем определять из условий в узлах элемента

$$e_R(x_s,\ y_s) = e_{Rs},\ s = i,\ j,\ k. \tag{13.7}$$

Решив систему (13.7), получим

$$e_R(x,\ y) = e_{Ri} Э_i(x,\ y) + e_{Rj} Э_j(x,\ y) + e_{Rk} Э_k(x,\ y), \tag{13.8}$$

где $Э(x,\ y)$ – определяются выражениями (8.19).

Подставив (13.8) в (13.5) и проинтегрировав в пределах каждого треугольного элемента, придем к следующему выражению для потенциальной энергии деформации:

$$V = \sum_{p=1}^{M} \sum_{k=1}^{3} \sum_{t=1}^{3} [D_{11}^0 e_{4k} e_{4t} + 2D_{12}^0 e_{4k} e_{7t} + D_{22}^0 e_{7k} e_{7t} + D_{12}^1 (e_{5k} \times$$
$$\times e_{5t} + 2e_{5k} e_{6t} + e_{6k} e_{6t})] S_{kt}, \tag{13.9}$$

где M – общее число элементов, представляющих в совокупности исследуемую область; $k,\ t$ – номера узлов в пределах треугольного

элемента; $S_{kt} = \int_{xy}\int Э_k(x,\ y) S_t(x,\ y)\, dxdy$ – интеграл от произведения функций $Э_k$ и $Э_t$ в пределах элемента.

Таким образом, в результате линейной аппроксимации элементов функционала (13.5) мы избежали дифференцирования искомой функции в пределах элемента и свели задачу к дифференцированию в узлах.

Так как основными узловыми неизвестными являются параметры u, v, непрерывность которых обеспечивается в силу специфики составления системы разрешающих уравнений в методе конечных элементов, то первые производные от u и v в узловых точках будут иметь конечные разрывы непрерывности, стремящиеся к нулю при уменьшении размеров элементов. Правда, это будет достигаться при условиях корректности выражений для частных производных от искомых функций в узловых точках. В рассматриваемом случае эти выражения определяются зависимостями (10.14) и (10.18), т. е.

$$\begin{Bmatrix} e_4 \\ e_5 \end{Bmatrix} = [A_u]\{q\}; \qquad \begin{Bmatrix} e_6 \\ e_7 \end{Bmatrix} = [A_v]\{q\}. \tag{13.10}$$

Выражения (13.10) получены из строгих исходных зависимостей, следующих из правила дифференцирования функций по некоторому направлению, и предположения о линейности изменения функций в пределах конечного элемента.

Используя зависимости вида (13.2), можно выражения (13.8) переписать в более компактной форме

$$e_R(x,\ y) = \sum_{i=1}^{15} Э_{Ri} q_i. \tag{13.11}$$

В рассматриваемом случае целесообразно использовать усеченный вектор неизвестных

$$\{q\} = \{q_{1i}\ q_{2i}\ q_{1j}\ q_{2j}\ q_{1k}\ q_{2k}\}. \tag{13.12}$$

Тогда в функциях $Э_R$ исчезнут нулевые коэффициенты, сохранение которых обязательно при исследовании напряженно-деформированного состояния оболочек или подкрепленных пластин.

При применении усеченного вектора $\{q\}$ верхний предел над знаком суммы в выражении (13.11) равен шести, т. е.

$$e_R(x,\ y) = \sum_{i=1}^{6} Э_{Ri} q_i. \tag{13.13}$$

Здесь функции $Э_R$ уже имеют более компактный вид и являются, как и прежде, линейными относительно координат x, y.

Используя аппроксимирующие полиномы (13.13), легко определить коэффициенты матрицы жесткости треугольного элемента в случае решения плоской задачи теории упругости

$$K_{mn} = \int_x \int_y]D_{11}^0 Э_{4m} Э_{4n} + D_{12}^0 (Э_{4m} Э_{7n} + Э_{4n} Э_{7m}) + D_{22}^0 Э_{7m} Э_{7n} + D_{12}^1 \times$$

$$\times (Э_{5m} Э_{5n} + Э_{5m} Э_{6n} + Э_{5n} Э_{6m} + Э_{6m} Э_{6n})] dxdy. \qquad (13.14)$$

Отличительной чертой рассмотренного алгоритма является простота реализации. Если сравнить (13.14) с соответствующими слагаемыми (13.4), то в первую очередь можно заметить отсутствие операций дифференцирования. Причем, как было показано выше, полиномы $Э_m$ и $Э_n$ легко определяются в явном виде и имеют очень простой вид. Отсутствие операций дифференцирования искомых функций освобождает от необходимости соблюдения совместности функций и их производных более низкого порядка, чем производные, входящие в функционал. Правда, рассматриваемый пример менее характерен, поскольку при решении плоской задачи теории упругости с помощью симплексных элементов особых сложностей не возникало и при использовании традиционных приемов. В этом отношении более показательным является следующий пример.

Рассмотрим решение задачи изгиба пластины. Для жестких изотропных пластин, загруженных поперечной нагрузкой, при определении потенциальной энергии деформации можно воспользоваться выражением

$$V = \frac{D}{2} \int_x \int_y [(\nabla^2 e_3)^2 + 2(1+\nu)(e_{12}^2 - e_{11} e_{13})] dxdy, \qquad (13.15)$$

где $D = Eh^3 (12(1-\nu^2))^{-1}$; h – толщина пластины; ν – коэффициент Пуассона.

По-прежнему рассмотрим аппроксимацию области с помощью треугольных элементов. Как и в предыдущем случае, можно записать, что

$$\left.\begin{aligned} e_3 &= \sum_{k=1}^{3} e_{3k} Э_k (x, y); \\ e_{11} &= \sum_{k=1}^{3} e_{11k} Э_k (x, y); \\ e_{12} &= \sum_{k=1}^{3} e_{12k} Э_k (x, y); \\ e_{13} &= \sum_{k=1}^{3} e_{13k} Э_k (x, y). \end{aligned}\right\} \qquad (13.16)$$

Тогда выражение для полной энергии системы будет иметь вид

$$Э = \sum_{p=1}^{M} \sum_{k=1}^{3} \sum_{t=1}^{3} \frac{D}{2} [e_{11k} e_{11t} + 2\nu e_{11k} e_{13t} + 2(1-\nu) e_{12k} e_{12t} +$$

$$+ e_{13k} e_{13t} - 2Q_k e_{3t}] S_{kt}. \qquad (13.17)$$

Здесь поперечная нагрузка также представлена в виде

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^{3} Q_k Э_k (x, y). \qquad (13.18)$$

Задача на данном этапе сводится к нахождению вторых частных производных в узловых точках, что можно легко сделать с помощью зависимостей (9.28), (9.32). Тогда выражения (13.16) будут представлены функциональной зависимостью от искомых обобщенных перемещений, т.е.

$$\left.\begin{aligned} e_3 &= \sum_{i=1}^{9} Э_{3i} (x, y) q_i; \\ e_{11} &= \sum_{i=1}^{9} Э_{11i} (x, y) q_i; \\ e_{12} &= \sum_{i=1}^{9} Э_{12i} (x, y) q_i; \\ e_{13} &= \sum_{i=1}^{9} Э_{13i} (x, y) q_i, \end{aligned}\right\} \qquad (13.19)$$

где вектор узловых неизвестных q имеет вид

$$\{q\}_m = \{q_{3m}\, q_{4m}\, q_{5m}\}. \qquad (13.20)$$

Коэффициенты матрицы жесткости изгибного элемента пластины могут быть определены из зависимости

$$K_{mn} = D \int_x \int_y [Э_{11m} Э_{11n} + Э_{11m} Э_{13n} + Э_{11n} Э_{13m} + Э_{13m} Э_{13n} + 2(1-\nu) \times$$

$$\times (Э_{12m} Э_{12n} - 0{,}5 Э_{11m} Э_{13n} - 0{,}5 Э_{11n} Э_{13m})] dxdy. \qquad (13.21)$$

Возвращаясь к выражению (13.17), следует заметить, что все операции по определению коэффициентов матриц жесткости в рассматриваемом случае сводятся к перемножению коэффициентов элементарных однострочных матриц и вычислению простейших интегралов S_{mn} в пределах области конкретного элемента.

Второй вариант. Квазилинейная аппроксимация. Линейный закон аппроксимации можно использовать в явном виде лишь для элементов треугольной формы. Уже для произвольного четырехугольного элемента приходится использовать более высокую степень аппроксимации, например: $w(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$. В этом случае проявляется нежелательное слагаемое $a_3 xy$, которое в итоге приведет к разрыву прогибов смежных элементов по их границам контакта. С уменьшением размеров элементов разрывы будут стремиться к нулю, но сходимость в этом случае будет недостаточно хорошей.

Чтобы не сталкиваться с таким обстоятельством при использовании четырехугольного элемента, воспользуемся квазилинейной аппроксимацией. Рассмотрим произвольный четырехугольный элемент и выделим в его пределах область, ограниченную двумя сторонами элемента и прямой, которая соединяет два узла, принадлежащих этим сторонам (рис. 15). В пределах полученного треугольника с вершинами i, j, k будем использовать линейную аппроксимацию соответствующих функций. Тогда, выполнив все операции, подробно описанные выше, получим первые коэффициенты матрицы жесткости четырехугольного элемента. Аналогично поступаем, анализируя треугольные элементы с вершинами (i, l, k), (k, l, j) и (l, j, i) в составе рассматриваемого четырехугольного элемента. В итоге мы придем к полной матрице жесткости произвольного треугольного элемента, коэффициенты которой определяются зависимостью

$$K_{mn} = 0{,}5\,(K^{i}_{mn} + K^{j}_{mn} + K^{k}_{mn} + K^{l}_{mn}). \qquad (13.22)$$

Здесь $K^{i\,(j,\ k,\ l)}_{mn}$ – коэффициенты матриц жесткости треугольных элементов, для которых начало координат выбрано в точках i, j, k, l соответственно. Значения коэффициентов K_{mn} определяются из зависимостей типа (13.14) или (13.21). Коэффициент 0,5 в (13.22) учитывает, что область четырехугольника перекрывается треугольными элементами дважды. Таким образом, линейная аппроксимация в пределах каждого треугольника трансформируется в квазилинейную в составе элемента. При такой аппроксимации, если соблюдается непрерывность некоторой функ-

ции в узловых точках, сохраняется непрерывность и по границе между смежными элементами.

Таким образом, можно сделать следующее заключение. В отличие от алгоритма, в котором соблюдается естественный порядок операций, т. е.

$$w(x, y) \to \frac{\partial w}{\partial x_i} \to \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \to J = J\left(w, \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\right), \quad i, j = 1, 2,$$

в рассматриваемом случае используется линейная аппроксимация элементов функционала, которыми являются компоненты полного перемещения и соответствующие частные производные от них. При таком подходе удовлетворяются все критерии сходимости, рассмотренные в предыдущей главе.

Если бы функционал (13.15) содержал первые производные от прогиба, то закон распределения их также следует выбрать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = c_0 + c_1 x + c_2 y, \quad i = 1, 2$$

в пределах треугольного участка элемента, т. е. непрерывность первых производных вдоль контура элемента произвольной формы будет обеспечена. Но она не будет в общем случае выполнена, если для определения функции $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ использовать обратные операции, т. е. если $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ определять из операции

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \int\limits_{x_j} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_j + c.$$

Исходя из линейной аппроксимации слагаемых функционала в пределах треугольного участка элемента произвольной четырехугольной формы, очень легко определить вид полиномов Эрмита, описывающих характер изменения составляющих функционала в пределах части четырехугольного элемента.

§ 14. L-координаты. Исключение операций машинного интегрирования функций

Применение квазилинейной аппроксимации резко сократило объем необходимых вычислений, но избежать машинного интегрирования функций при произвольной форме элемента в этом случае не удается. Применение L-координат при описании закона изменения соответствующих функций позволяет сократить и эти операции до минимума.

Для треугольного элемента наиболее распространенной является естественная система координат, определяемая тремя относительными координатами L_1, L_2 и L_3, изображенными на рис. 17. Каждая координата представляет собой отношение расстояния от выбранной точки треугольника до одной из его сторон s к высоте h, опущенной на эту сторону из противолежащей вершины (рис. 17, *а*). Ясно, что величина L_1 изменяется в пределах от нуля до единицы. В тех же пределах изменяются L_2 и L_3. На рис. 17, *б* показаны линии, вдоль которых L_1 постоянна по величине. Каждая линия параллельна стороне, от которой измеряется L_1.

Координаты L_1, L_2 и L_3 называются L-координатами. Их значения дают относительные величины площадей треугольников, на которые разбит элемент. L-координаты точки B (рис. 17, *а*) представляют собой площади треугольников, изображенных на рис. 17, *в*. Площадь F треугольника (i, j, k) дается формулой: $F = bh/2$.

Площадь треугольника F_1 (B, j, k) равна: $F_1 = bs/2$. Составим отношение этих площадей: $F_1/F = s/h = L_1$.

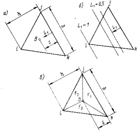


Рис. 17. L-координаты для треугольного элемента.

Итак, координата L_1 представляет собой отношение площади треугольника F_1 на рис. 17, *в* к площади всего треугольного элемента.

Аналогичные формулы могут быть записаны для L_2 и L_3: $L_2 = F_2/F$; $L_3 = F_3/F$. Так как

$$F_1 + F_2 + F_3 = F, \tag{14.1}$$

то $L_1 + L_2 + L_3 = 1$. Уравнения (14.1) связывают между собой три координаты. Преимуществом использования L-координат является существование интегральных формул, которые упрощают до минимума вычисления интегралов вдоль сторон элемента и по его площади [12, 33]:

$$\int_L L_1^a L_2^b \, dL = \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!} L; \tag{14.2}$$

$$\iint_S L_1^a L_2^b L_3^c \, dS = 2 \frac{a!\,b!\,c!}{(a+b+c+2)!} S. \tag{14.3}$$

Как и при квализинелинейной аппроксимации, матрицу жесткости четырехузлового элемента будем строить исходя из базисного треугольного элемента, в пределах которого закон изменения функций и их частных производных линеен. Ограничиваясь рассмотрением изгибного элемента, можно записать

$$e_R = L_1 e_{Ri} + L_2 e_{Rj} + L_3 e_{Rk}. \tag{14.4}$$

Так как узловые значения частных производных определяются каноническими соотношениями (10.18), (10.26), то

$$e_R = \sum_{i=1}^{n} Э_{Ri} (L_1, L_2, L_3) q_i, \tag{14.5}$$

где $Э_{Ri} (L_1, L_2, L_3) = k_{1e} L_1 + k_{2e} L_2 + k_{3e} L_3$, k_{re} – коэффициенты матрицы $[A]$.

Коэффициенты матрицы жесткости определяются из тех же выражений, что и при квазилинейной аппроксимации. Значения же интегралов в этом случае легко определяются из выражений (14.3)

Отличительной особенностью использования L-координат при решении задач на основе функционала второго порядка в данном случае является отсутствие необходимости дифференцирования по декартовым координатам, т. е. отсутствие операции

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial L_1}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial L_3},$$

Это резко сокращает объем вычисления и приводит к наиболее явному проявлению преимущества L-координат. При реализации этого алгоритма высшей операцией является перемножение составляющих матриц-строк, что само по себе элементарно.

При использовании L-координат, так же как и при линейной аппроксимации, необходимо соблюдать условие непрерывности функций по границам между смежными элементами, если в узловых точках это условие является естественным. Покажем, что непрерывность функций при такой постановке гарантирована [33]. Рассмотрим два смежных элемента (рис. 18). Начало системы координат поместим в i-м узле. Обозначим узловые значения искомой функции через e_i, e_j, e_k и e_l. Аппроксимирующие функции для e имеют вид

$$\left.\begin{aligned} e_{(1)} &= L_1^1 e_i^1 + L_2^1 e_j^1 + L_3^1 e_k^1; \\ e_{(2)} &= L_1^2 e_i^2 + L_2^2 e_j^2 + L_3^2 e_k^2. \end{aligned}\right\} \qquad (14.6)$$

L-координаты L_3^1 и L_2^2 измеряются от общей границы, поэтому вдоль этой границы $L_3^1 = L_2^2 = 0$. Соотношения (14.6) в точках общей границы сводятся к следующим:

$$\left.\begin{aligned} e_{(1)} &= L_1^1 e_i^1 + L_2^1 e_k^1 = L_1^1 e_i^1 + (1 - L_1^1) e_k^1; \\ e_{(2)} &= L_1^2 e_i^2 + L_3^2 e_k^2 = L_1^2 e_i^2 + (1 - L_1^2) e_k^2, \end{aligned}\right\} \qquad (14.7)$$

так как $L_1^1 + L_2^1 = 1$ и $L_1^2 + L_3^2 = 1$.

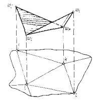


Рис. 18. Непрерывность функции вдоль общей границы двух треугольных элементов.

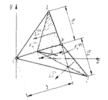


Рис. 19. Значения L-координат в точках на границе элементов.

Рассмотрим произвольную точку общей границы, которая расположена *на расстоянии s от k-го узла* (рис. 19). *Отношения* $F_1^{(1)}/F^{(1)}$ *и* $F_1^{(2)}/F^{(2)}$ равны величине s/b и, следовательно, равны между собой. Указанные отношения представляют собой также числовые значения L-координат L_1^1 и L_1^2, откуда можно заключить, что $L_1^1 = L_1^2$ для произвольной точки общей границы. Используя это равенство в формуле (14.7), получаем, что всюду вдоль границы $e_{(1)} = e_{(2)}$, что и требовалось доказать.

§ 15. Машинный алгоритм формирования массива производных от искомых функций

При формировании матриц жесткости можно использовать несколько вариантов алгоритма. Одним из них является последовательное формирование массивов частных производных по мере их использования на том или ином этапе построения матрицы жесткости. Другим – предварительное формирование всего массива частных производных. В данном случае остановимся на втором варианте, требующем меньшего количества промежуточных операций в процессе формирования матриц жесткости.

Предположим, что необходимо построить матрицу жесткости четырехугольного элемента (рис. 15), работающего в составе пластины, испытывающей действие поперечной нагрузки. В этом случае для определения коэффициентов матрицы жесткости можно воспользоваться выражением (13.17) и условием минимума полной энергии системы $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial q_i} = 0$.

В соответствии с характером выражения (13.17) прежде всего необходимо сформировать массив частных производных функций $w(x, y)$ в узлах элемента i, j, k, e. Для этого воспользуемся каноническими выражениями (10.26) – (10.31).

Учитывая, что при решении таких задач вектор узловых неизвестных можно взять в виде

$$\{q\} = \{q_3\, q_4\, q_5\}, \qquad (15.1)$$

упростим матричные выражения (10.26), (10.30):

$$\left.\begin{aligned} [A_{11}]_i &= \frac{1}{\delta_i} [A_i^x\; B_i^x C_i^x\; A_j^x B_j^x C_j^x \\ &\quad A_k^x B_k^x C_k^x \quad 0 \quad 0 \quad 0]; \\ [A_{12}]_i &= \frac{1}{2\Delta_i} [0\, B_i^{xy}\; C_i^{xy}\; 0\; B_j^{xy}\; C_j^{xy} \\ &\quad 0 \quad B_k^{xy}\, C_k^{xy} \quad 0 \quad 0 \quad 0]; \\ [A_{13}]_i &= \frac{1}{\delta_i} [A_i^y B_i^y C_i^y\; A_j^y B_j^y C_j^y \\ &\quad A_k^y B_k^y C_k^y \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \end{aligned}\right\} \qquad (15.2)$$

Коэффициенты A, B, C определяются из зависимостей (10.28), (10.29), (10.31). Под коэффициенты матриц $[A]$ отведем массивы размерностью 1×48 каждый, предварительно очистив их от предыдущей информации. Здесь и в дальнейшем все массивы приняты линейными, что создает большую гибкость в обращении с ними.

В рассматриваемом параграфе мы не будем придерживаться формальной строгости программирования. Наметим лишь алгоритм машинной программы. Прежде всего необходимо запрограммировать канонические выражения (10.28), (10.29), (10.31), предварительно разбив их на триады и присвоив условные адреса каждому элементу канонического матричного выражения:

$$\left.\begin{array}{ll}
A_{11}(M) = \dfrac{1}{\delta_i} A_i^x; & A_{13}(M) = \dfrac{1}{\delta_i} A_i^y; \\
A_{11}(M+1) = \dfrac{1}{\delta_i} B_i^x; & A_{13}(M+1) = \dfrac{1}{\delta_i} B_i^y; \\
A_{11}(M+2) = \dfrac{1}{\delta_i} C_i^x; & A_{13}(M+2) = \dfrac{1}{\delta_i} C_i^y; \\
A_{11}(N) = \dfrac{1}{\delta_i} A_j^x; & A_{13}(N) = \dfrac{1}{\delta_i} A_j^y; \\
A_{11}(N+1) = \dfrac{1}{\delta_i} B_j^x; & A_{13}(N+1) = \dfrac{1}{\delta_i} B_j^y; \\
A_{11}(N+2) = \dfrac{1}{\delta_i} C_j^y; & A_{13}(N+2) = \dfrac{1}{\delta_i} C_j^y; \\
A_{11}(L) = \dfrac{1}{\delta_i} A_k^x; & A_{13}(L) = \dfrac{1}{\delta_i} A_k^y; \\
A_{11}(L+1) = \dfrac{1}{\delta_i} B_k^x; & A_{13}(L+1) = \dfrac{1}{\delta_i} B_k^y; \\
A_{11}(L+2) = \dfrac{1}{\delta_i} C_k^x; & A_{13}(L+2) = \dfrac{1}{\delta_i} C_k^y; \\
A_{12}(M+1) = \dfrac{1}{2\Delta_i} B_i^{xy}; & A_{12}(N+2) = \dfrac{1}{2\Delta_i} C_j^{xy}; \\
A_{12}(M+2) = \dfrac{1}{2\Delta_i} C_i^{xy}; & A_{12}(L+1) = \dfrac{1}{2\Delta_i} B_k^{xy}; \\
A_{12}(N+1) = \dfrac{1}{2\Delta_i} B_j^{xy}; & A_{12}(L+2) = \dfrac{1}{2\Delta_i} C_k^{xy};
\end{array}\right\} \quad (15.3)$$

Построение массивов начнем с массива частных производных функции $w(x, y)$ для первого узла элемента. В этом случае, используя данные табл. 3, следует положить:

$$M = 1; \qquad N = 4; \qquad L = 7;$$

$$x_i = x_1; \qquad x_j = x_2; \qquad x_k = x_3;$$

$$y_i = y_1; \qquad y_j = y_2; \qquad y_k = y_3.$$

Коэффициенты M, N, L определяются из выражений

$$\left.\begin{array}{l}
M = (S_i - 1) * 3 + M_0; \\
N = (S_j - 1) * 3 + M_0; \\
L = (S_k - 1) * 3 + M_0,
\end{array}\right\} \quad (15.4)$$

где $M_0 = (S_i - 1) * 12 + 1$.

Значения S_i, S_j, S_k равны текущим значениям индексов i, j, k, взятым из соответствующей строки табл. 3. В рассматриваемом случае начало координат совпадает с положением первого узла, поэтому все значения, использованные выше, взяты из первой строки. Обратившись к выражениям (15.3), сформируем массивы частных производных функции $w(x, y)$ для узла 1.

Перенеся начало координат в узел 2 и, воспользовавшись данными второй строки, положим:

$$M = 16; \qquad N = 13; \qquad L = 22;$$

$$x_i = x_2; \qquad x_j = x_1; \qquad x_k = x_4;$$

$$y_i = y_2; \qquad y_j = y_1; \qquad y_k = y_4.$$

Тогда с помощью канонических зависимостей (15.3) формируются массивы частных производных, относящихся ко второму узлу. Аналогично поступаем при совмещении начала координат с положением третьего узла. Значения коэффициентов и координат определяются следующим массивом исходных данных для узла 3:

$$M = 31; \qquad N = 34; \qquad L = 25;$$

$$x_i = x_3; \qquad x_j = x_4; \qquad x_k = x_1;$$

$$y_i = y_3; \qquad y_j = y_4; \qquad y_k = y_1.$$

Для узла 4 имеем:

$$M = 46; \qquad N = 43; \qquad L = 40;$$

$$x_i = x_4; \qquad x_j = x_3; \qquad x_k = x_2;$$

$$y_i = y_4; \qquad y_j = y_3; \qquad y_k = y_2.$$

Таким образом, все массивы частных производных, необходимые при решении задач изгиба неподкрепленных пластин, формируются элементарно с помощью канонических выражений (15.3). Аналогично поступают и при использовании четырехузловой схемы, и при определении частных производных тангенциальных составляющих полного перемещения при решении плоской задачи теории упругости.

Следует обратить внимание, что в рассмотренном алгоритме не использовались текущие значения индекса l, так как элементы рассмотренных выше матричных канонических выражений, относящиеся к узловой точке с индексом l, равны нулю. Для четырехузловой схемы должны быть использованы все текущие значения индексов i, j, k, l.

Четырехузловая схема более сложна в реализации, хотя особых трудностей не возникает. Как и в рассмотренном алгоритме, в первую очередь программируется процесс формирования массивов частных производных для некоторого формального узла. Он может быть оформлен в виде отдельной подпрограммы. Затем, воспользовавшись аналогией с приведенным алгоритмом, формируются необходимые массивы.

§ 16. Машинный алгоритм формирования матриц жесткости элементов пластин, работающих на изгиб

Прежде всего напомним, что при построении матрицы жесткости четырехугольного элемента используется прием двойной триангуляции. Затем, учитывая (13.17), представим в виде программы КАНОН алгоритм интеграла по площади треугольника от произведения некоторых двух функций, линейно изменяющихся в пределах треугольного элемента, т. е. интеграл имеет вид

$$C \iint\limits_{x\ y} e_R\, e_s\, dx\, dy =$$

$$= C \sum_{k=1}^{3} \sum_{t=1}^{3} (e_{Rk}\, e_{st}) s_{kt}, \tag{16.1}$$

где C — некоторый коэффициент;


```
      SUBRϕUTINE ␣ KAHϕH (SG,AI,AJ,AK,
   *  BI,BJ,BK)
      DIMENSIϕN ␣ SG (78), AI (12), AJ (12),
   *  AK (12), BI (12), BJ (12), BK (12)
      N = 0
      Dϕ ␣ 1 ␣ M = 1,12
      Dϕ ␣ 1 ␣ K = M, 12
      N = N + 1
      SG(N) = SG(N) + C * S * 0.5 *
   *  (AI (M) * BI (K) + AI (K) * BI (M) +                  (16.2)
   *  AJ (M) * BJ (K) + AJ (K) * BJ (M) +
   *  AK (M) * BK (K) + AK (K) * BK (M) +
   *  0.5 * (AI(M) * BJ(K) + AI (K) * BJ (M) +
   *  AI (M) * BK (K) + AI (K) * BK (M) +
   *  AJ(M) * BI(K) + AJ(K) * BI (M) +
   *  AJ (M) * BK (K) + AJ(K) * BK (M) +
   *  AK (M) * BI (K) + AK (K) * BI(M) +
   *  AK (M) * BJ (K) + AK (K) * BJ (M)))/6
 1 ␣  CϕNTINUE
      RETURN
      END
```

Программа КАНОН предполагает использование L-координат при аппроксимации закона распределения функций e_R, e_s в пределах треугольной области.

Рассматривая треугольную область I (рис. 15) четырехугольного элемента, определим ее площадь $S = S1$ по известной зависимости

$$S1 = \frac{1}{2} \parallel (x_i - x_k)(y_i + y_k) + (x_k - x_j)(y_k + y_j) + \\ + (x_j - x_i)(y_j + y_i) \parallel . \qquad (16.3)$$

Предположим, что

$$e_R = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad e_s = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad c = \frac{1}{2} D.$$

Тогда с помощью блока

```
      | D φ ␣ 1 ␣ I = 1, 12
      | K 1 = (L 1 - 1) * 12 + I
      | K 2 = (L 2 - 1) * 12 + I
      | K 3 = (L 3 - 1) * 12 + I
      | A I (I) = A 11 (K 1)
      | A J (I) = A 11 (K2)
      | A K (I) = A 11 (K3)
      | B I (I) = A 11 (K1)
      | B J (I) = A 11 (K 2)
  1 ␣ | B K (I) = A 11 (K3)
```

делается выборка соответствующих линейных массивов частных производных. Здесь $L1, L2, L3$ являются номерами узлов элемента. В частности, для первой треугольной области они соответственно равны 1, 2, 3. В данном случае подразумевается тождество массивов $A11$ и A_{11}. Затем с помощью программы КАНОН производится заполнение массива матрицы жесткости SG.

После окончания этой процедуры полагаем, что $C = \nu D$; $e_R = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $e_s = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$. Производим выборку необходимых массивов, предполагая что последние три оператора (16.3) будут иметь вид

```
      . . . . . . . . .
      B I (I) = A 13 (K1)
      B J (I) = A 13 (K2)
  ␣   B K (I) = A 13 (K3).                    (16.5)
```

Обратившись к программе КАНОН, дополняем матрицу жесткости SG.

Таким образом, проделав все операции в соответствии с (13.17), сформируем часть матрицы жесткости, отвечающую первой треугольной области. Затем приступаем к аналогичным операциям для треугольных областей *II*, *III*, *IV*. При определении положения начала координат необходимо руководствоваться информацией табл. 3, полагая, что начало координат всегда совпадает с узловой точкой, имеющей номер i, т. е. для треугольной области *II* параметры $L1$, $L2$, $L3$ будут соответственно равны 3, 4, 1. Для *III* – 4, 3, 2. Для *IV* – 2, 1, 4.

В заключение отметим, что в качестве алгоритмического языка был использован ФОРТРАН.

Принятая схема построения алгоритма может иметь и другую последовательность, но остается неизменной ее простота, так как она не содержит явных операций дифференцирования и интегрирования функций.

§ 17. Выделение угла поворота элемента как жесткого тела в явном виде

Рассмотрим деформацию в окрестности точки A деформированного тела. Деформация тела сопровождается перемещением точки A, изменением длин линейных элементов, проходящих через нее, и изменением направлений этих элементов. Будем интересоваться сейчас лишь поворотами этих элементов. Исключим из рассмотрения перемещения точки A и изменения длин линейных элементов, так как они не являются существенными при изучении их поворотов.

Характеристикой поворота окрестности точки деформируемого тела в плоскости XOY является величина

$$\theta_z = 2\theta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (17.1)$$

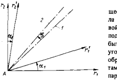


Рис. 20. Поворот в окрестности точки *A в плоскости* r_1, r_2.

1 – биссектриса угла r_1Ar_2; *2* – биссектриса угла $r_1'Ar_2'$.

Если предположить, что существует линейная зависимость уг*ла поворота элемента от его угловой* координаты относительно неподвижного элемента, то θ может быть истолковано как удвоенный угол поворота биссектрисы угла, образованного линейными элементами, проходящими через точку A и параллельными осям координат x, y.

Пусть имеется два ортого*нальных линейных элемента в ок*рестности точки A, направленных вдоль осей r_1 и r_2 ($r_1 \parallel x$, $r_2 \parallel y$) (рис. 20).

В результате деформации тела направления элементов r_1 и r_2 повернутся и займут положения r_1' и r_2':

$$\alpha_1 = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Угол сдвига γ_{xy} определяется зависимостью: $\gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}$;

удвоенный угол поворота биссектрисы 2θ равен

$$2\theta = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

В методе конечных элементов существует несколько предложений выделения угла поворота элемента как жесткого тела [12, 28]. В основном эти предложения относятся к области расчета оболочек. Но потребность выделения угла θ возникает и при решении любой другой задачи в пространственной постановке, например при решении плоской задачи теории упругости или задачи изгиба сопряженных и ориентированных под углом друг к другу пластин. Преобразуем выражение для угловой относительной деформации

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial x} - \theta; \qquad (17.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} + \theta. \qquad (17.3)$$

В выражения функционалов (13.1), (13.5) входит слагаемое

$$D_{12}^1\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,$$

которое с помощью (17.2), (17.3) можно представить в развернутом виде

$$D_{12}^1\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = D_{12}^1\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial x} - \theta\right]\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} + \theta\right] = D_{12}^1\left[\frac{3}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \theta\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \theta^2\right]. \qquad (17.4)$$

Варьируя по искомым параметрам, получим соответствующую систему уравнений равновесия, которая будет содержать очевидное соотношение:

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

§ 18. Построение матриц жесткости элемента пологой оболочки

Обратимся к элементу пологой оболочки, для которого кроме координат узлов зададимся значениями кривизны поверхности (рис. 21).

Рассмотрим базовый треугольный элемент. Распространить результаты полученного решения на четырехугольные элементы не представляет труда.

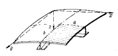


Рис. 21. Пологая оболочка, подкрепленная ребрами жесткости.

Характерной особенностью поведения элемента оболочки является возможность его смещения как жесткого тела. В данном случае будем предполагать, что смещение элемента как жесткого тела устранено. Тогда, учитывая, что выражения для деформаций имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\epsilon_1^0 = e_1 - k_1 e_3; \quad \epsilon_2^0 = e_2 - k_2 e_3; \\
&e_{12}^0 = \frac{3}{4}(e_5 + e_6)^2 + e_5 e_6 + (e_5 - e_6) e_{10} - e_{10}^2; \\
&\epsilon_{1u} = -z e_{11}; \quad \epsilon_{2u} = -z e_{13}; \\
&\epsilon_{12u} = -2 z e_{12}
\end{aligned}\right\} \qquad (18.1)$$

и учитывая линейность их изменения в пределах элемента, можно записать

$$e_m = \sum_{p=1}^{18} Э_{pm} (L_1 L_2 L_3) q_p. \qquad (18.2)$$

В рассматриваемом случае вектор неизвестных для i-го узла имеет вид

$$\{q\}_i = \{q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6\}. \qquad (18.3)$$

Функции $Э_{pm}$ элементарны и могут быть легко найдены, если исходить из закона распределения искомых функций и их производных в пределах элемента

$$e_m = L_1 e_{m1} + L_2 e_{m2} + L_3 e_{m3}. \qquad (18.4)$$

Здесь e_{mi} – значение e_m в узловой точке i. Матричные выражения для узловых значений e_m были приведены во второй главе.

Теперь не представляет сложностей определить коэффициенты матрицы жесткости, исходя из выражения (13.1) для энергии деформации элемента пологой оболочки

$$V = \sum_{m=1}^{18} \sum_{n=1}^{18} K_{mn} q_m q_n;$$

где

$$K_{mn} = \int_s\int [D_{11}^0 Э_{m4} Э_{n4} + D_{22}^0 Э_{m6} Э_{n6} +$$

$$+ D_{12}^0 (Э_{m4} Э_{n7} + Э_{m7} Э_{n4}) - (K_1 D_{11}^0 + K_2 D_{12}^0)(Э_{m4} Э_{n3} +$$

$$+ Э_{n4} Э_{m3}) - (K_2 D_{22}^0 + K_1 D_{12}^0)(Э_{m7} Э_{n3} + Э_{n7} Э_{m3}) +$$

$$+ (D_{11}^0 K_1^2 + 2 D_{12}^0 K_1 K_2 + D_{22}^0 K_2^2) Э_{m3} Э_{n3} +$$

$$+ \frac{3}{4} D_{12}^1 (Э_{m5} Э_{n5} + Э_{m5} Э_{n6} + Э_{n5} Э_{m6} + Э_{m6} Э_{n6}) +$$

$$+ \frac{1}{2} D_{12}^1 (Э_{m6} Э_{n10} + Э_{n6} Э_{m10} - Э_{m5} Э_{n10} - Э_{n5} Э_{m10} +$$

$$+ Э_{m5} Э_{n6} + Э_{n5} Э_{m6}) - D_{12}^1 Э_{m10} Э_{n10} +$$

$$+ D_{11}^1 Э_{m11} Э_{n11} + D_{12}^2 (Э_{m11} Э_{n13} +$$

$$+ Э_{n11} Э_{m13}) + 4 D_{12}^3 Э_{m12} Э_{n12} +$$

$$+ D_{22}^1 Э_{m13} Э_{n13}] \, dS. \qquad (18.5)$$

Для построения матрицы жесткости четырехугольного элемента необходимо воспользоваться квазилинейной аппроксимацией в пределах элемента. Для этого следует расширить вектор узловых неизвестных, который будет иметь вид:

$$\{q\} = \{\{q\}_i \; \{q\}_j \; \{q\}_k \; \{q\}_l\}. \qquad (18.6)$$

§ 19. Учет возможности смещения элемента оболочки как жесткого тела

Рассмотрим прямоугольный элемент (рис. 21) со сторонами a, b и параметрами кривизны k_1, k_2, k_{12}.

При смещении элемента как жесткого тела его деформации равны нулю, т. е.

$$\left.\begin{aligned}
&e_4 - k_1 e_3^* = 0; \\
&e_7 - k_2 e_3^* = 0; \\
&e_5 + e_6 - k_{12} e_3^* = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (19.1)$$

Здесь $e_3^* = w^*$ характеризует смещение элемента как жесткого тела.

Выделим из четырехугольного элемента треугольную подобласть с вершинами i, j, k (рис. 22) и аппроксимируем e_3^* в пределах такого элемента симплексной функцией

$$e_3^* = A_0^* + A_1^* x + A_2^* y. \qquad (19.2)$$

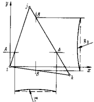


Рис. 22. Треугольный базовый элемент пологой оболочки.

Постоянные A_0^*, A_1^*, A_2^* определим из условия

$$e_3^*(x_m y_m) = e_{3m}^*. \tag{19.3}$$

Решив систему (19.3), получим

$$\{A^*\} = [c]\{e_3^*\}, \tag{19.4}$$

где

$$\{A^*\} = \{A_0^* A_1^* A_2^*\};$$

$$\{e_3^*\} = \{e_{3i}^* e_{3j}^* e_{3k}^*\};$$

$$[c] = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ y_{jk} & y_{ki} & y_{ij} \\ x_{kj} & x_{ik} & x_{ji} \end{bmatrix} \tag{19.5}$$

$$\Delta = x_j y_k - x_k y_j; \quad x_i = y_i = 0.$$

Учитывая (19.1), найдем зависимости для тангенциальных составляющих перемещения при жестком смещении элемента

$$u^*(x,y) = u_i^* + \lfloor (k_1 x + k_{12} y),\ \frac{1}{2}(k_1 x^2 - k_2 y^2),\ (k_1 xy) \rfloor [c]\{e_3^*\}; \tag{19.6}$$

$$v^*(x,y) = v_i^* + \lfloor (k_{12} x + k_2 y),\ (k_2 xy),\ \frac{1}{2}(-k_1 x^2 + k_2 y^2) \rfloor [c]\{e_3^*\}, \tag{19.7}$$

где u^*, v^* – компоненты тангенциального перемещения точки элемента при смещении его как жесткого тела.

В случае поворо́та элемента как жесткого тела относительно узла i можно записать, что

$$e_{3j}^* = e_{3i} + e_{8i} x_{ji} + e_{9i} y_{ji}; \tag{19.8}$$

$$e_{3k}^* = e_{3i} + e_{8i} x_{ki} + e_{9i} y_{ki}. \tag{19.9}$$

Аналогично, если рассматривать поворот относительно узлов j и k, получим:

$$\left.\begin{aligned} e_{3i}^* &= e_{3j} + e_{8j} x_{ij} + e_{9j} y_{ij}; \\ e_{3k}^* &= e_{3j} + e_{8j} x_{kj} + e_{9j} y_{kj}; \\ e_{3j}^* &= e_{3k} + e_{8k} x_{jk} + e_{9k} y_{jk}; \\ e_{3i}^* &= e_{3k} + e_{8k} x_{ik} + e_{9k} y_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{19.10}$$

Оценивая смещения как средние из приведенных выше, имеем

$$\{e_3^*\} = [B^*]\{\bar q\}, \tag{19.11}$$

где

$$[B^*] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x_{ij} & y_{ij} & 1 & x_{ik} & y_{ik} \\ 1 & x_{ji} & y_{ji} & 0 & 0 & 0 & 1 & x_{jk} & y_{jk} \\ 1 & x_{ki} & y_{ki} & 1 & x_{kj} & y_{kj} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\{\bar q\} = \{q_{3i} q_{4i} q_{5i} q_{3j} q_{4j} q_{5j} q_{3k} q_{4k} q_{5k}\}$$

Тангенциальные перемещения элемента будут складываться из перемещений, отвечающих смещению его как жесткого тела, и перемещений, возникающих при упругих деформациях, которые могут быть определены зависимостью

$$u = A_0 + A_1 x + A_2 y; \quad v = B_0 + B_1 x + B_2 y. \tag{19.12}$$

Так как A_0 и B_0 характеризуют поступательное смещение, т. е. смещение жесткого тела, то можно положить:

$$A_0 = B_0 = 0.$$

Четыре другие постоянные для смещения упругого тела определяются из условий в узлах элемента:

$$\left.\begin{aligned} u_j^{\text{упр}} &= u_j - u_i = u(x_j, y_j); \\ u_k^{\text{упр}} &= u_k - u_i = u(x_k, y_k); \\ v_j^{\text{упр}} &= v_j - v_i = v(x_j, y_j); \\ v_k^{\text{упр}} &= v_k - v_i = v(x_k, y_k). \end{aligned}\right\} \tag{19.13}$$

Выражения для полных тангенциальных перемещений имеют вид

$$\left.\begin{aligned} & u(x,y) = \lfloor 1, x, y \rfloor [c] \; \{u\} + \lfloor (k_1 x + k_{12} xy), \\ & \frac{1}{2}(k_1 x^2 - k_2 y^2), \; (k_1 xy) \rfloor [c] [B^*] \; \{\bar{q}\} \; ; \\ & v(x,y) = \lfloor 1, x, y \rfloor [c] \; \{v\} + \lfloor (k_{12} y + k_2 y), \\ & (k_2 xy), \frac{1}{2}(-k_1 x^2 + k_2 y^2) \rfloor [c] [B^*] \left\{\bar{q}\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (19.14)$$

где

$$\{u\} = \{u_i u_j u_k\} \; ; \quad \{v\} = \{v_i v_j v_k\} \; .$$

Не представляет теперь особого труда свести (19.14) к следующим выражениям:

$$\left.\begin{aligned} & u(x,y) = \lfloor 1, x, y, x^2, xy, y^2 \rfloor [u_0] \; \{q\} = \sum_{i=1}^{24} Э_{ui} q_j ; \\ & v(x,y) = \lfloor 1, x, y, x^2, xy, y^2 \rfloor [v_0] \; \{q\} = \sum_{i=1}^{24} Э_{vi} q_i , \end{aligned}\right\} (19.15)$$

где $[u_0]$, $[v_0]$ – матрицы размерностью 6x24.

Здесь вектор $\{q\}$ представлен всеми узловыми неизвестными для четырехугольного элемента, хотя рассуждения ведутся о деформации его некоторой подобласти треугольного вида.

Продолжая рассматривать элемент с вершинами i, j, k, выделенный из элемента прямоугольной формы, построим полином, отражающий поперечные перемещения в пределах треугольной подобласти. Для этой цели рассмотрим полный кубический полином

$$\begin{aligned} e_3 = {} & a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + \\ & + a_6 x^3 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 y^3 . \end{aligned} \quad (19.16)$$

Для определения постоянных a_i будем использовать условия в узлах элемента. Но в отличие от обычно учитываемых условий, которые записываются через узловые значения прогиба и углов поворота, будем использовать условия, отражающие основную идею независимой аппроксимации, рассмотренную ниже.

Начало координат поместим в узловую точку i. Тогда можно записать, что

$$\left.\begin{aligned} & e_{11}(x_m y_m) = e_{11m} ; \\ & e_{12}(x_m y_m) = e_{12m} ; \\ & e_{13}(x_m y_m) = e_{13m} , \\ & m = i, j, k . \end{aligned}\right\} \quad (19.17)$$

Из условий (19.17) следует, что

$$\left.\begin{aligned} & 2a_3 + 6a_6 x_i + 2a_7 y_i = e_{11i} ; \\ & 2a_3 + 6a_6 x_j + 2a_7 y_j = e_{11j} ; \\ & 2a_3 + 6a_6 x_k + 2a_7 y_k = e_{11k} ; \end{aligned}\right\} \quad (19.18)$$

$$\left.\begin{aligned} & 2a_5 + 2a_8 x_i + 6a_9 y_i = e_{13i} ; \\ & 2a_5 + 2a_8 x_j + 6a_9 y_j = e_{13j} ; \\ & 2a_5 + 2a_8 x_k + 6a_9 y_k = e_{13k} ; \end{aligned}\right\} \quad (19.19)$$

$$a_4 = e_{12i} . \quad (19.20)$$

Решая системы уравнений (19.18), (19.19), найдем значения постоянных a_i:

$$\left.\begin{aligned} & \{d_1\} = [\Phi]_i \{e_{11}\} \; ; \\ & \{d_2\} = [\Phi]_i \{e_{13}\} \; . \end{aligned}\right\} \quad (19.21)$$

Матрицы, входящие в (19.21), имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
\{d_1\} &= \{2a_3\ 6a_6\ 2a_7\};\\
\{d_2\} &= \{2a_5\ 2a_8\ 6a_9\};\\
\{e_{11}\} &= \{e_{11i}\ e_{11j}\ e_{11k}\};\\
\{e_{13}\} &= \{e_{13i}\ e_{13j}\ e_{13k}\};\\
[\Phi]_i &= \frac{1}{\Delta_i}\begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0\\ y_{jk} & y_{ki} & y_{ij}\\ x_{kj} & x_{ik} & x_{ji}\end{bmatrix};\\
\Delta &= x_j y_k - x_k y_j;\\
x_i &= y_i = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (19.22)$$

Значения составляющих векторов $\{e_{1R}\}$ определяются по зависимостям, полученным во второй главе.

В выражении (19.16) остались неопределенными коэффициенты a_0, a_1, a_2, которые могут быть легко найдены, если воспользоваться обычными условиями в узлах треугольной подобласти прямоугольного элемента

$$w(x_m, y_m) = w_m,\qquad m = i, j, k. \qquad (19.23)$$

В результате элементарных операций полином, отражающий изменение поперечной составляющей перемещения в пределах первой треугольной подобласти, может быть представлен в виде

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{24} \mathcal{Э}_{wi}\, q_i. \qquad (19.24)$$

Тогда, воспользовавшись выражением для энергии деформации элемента и выражениями (19.15), (19.24), определим коэффициенты матрицы жесткости треугольной подобласти прямоугольного элемента.

Перенеся начало координат в узловую точку j и рассматривая элемент с вершинами i, j, l, определим коэффициенты матрицы жесткости второй треугольной подобласти.

Аналогично поступаем, располагая начало координат в узлах l и k. Повторять все проделанные операции не имеет смысла, поскольку для построения искомых зависимостей можно воспользоваться уже полученными, придав индексам i, j, k соответствующие значения.

Просуммировав полученные коэффициенты всех четырех матриц и разделив их на два, так как использовалась двойная триангуляция, получим окончательные значения коэффициентов матрицы жесткости элемента прямоугольной формы.

§ 20. Построение матрицы жесткости подкрепляющего ребра с учетом эксцентричности подкрепления и условий совместности

Рассмотрим пологую оболочку, подкрепленную ребрами жесткости. Для ребер считаем применимой теорию стержней Кирхгофа – Клебша и будем учитывать в основном жесткость ребер в плоскости, нормальной к срединной поверхности оболочки. Условия совместности деформирования ребер и подкрепляемой оболочки выражаются зависимостями (2.11).

При формировании матриц жесткости элементов будем предполагать, что ребра жесткости окаймляют рассматриваемый элемент. Элементы матрицы жесткости определяют, исходя из условия экстремальности потенциальной энергии по параметрам аппроксимирующих полиномов

$$K_{mn} = \frac{\partial V(q_m, q_n)}{\partial q_m \partial q_n},$$

где

$$V(q_m, q_n) = V_0(q_m, q_n) + V_и(q_m, q_n) + V_p(q_m, q_n).$$

В свою очередь $V_0(q_m, q_n)$ и $V_и(q_m, q_n)$ – определяются выражениями (3.10), (3.11), которые уже были использованы при построении матрицы жесткости элемента оболочки. Исходя из этого целесообразно матрицу жесткости подкрепленного элемента формировать как сумму матриц неподкрепленного элемента и подкрепляющих ребер. При этом для построения матрицы жесткости подкрепляющих элементов можно воспользоваться матрицей жесткости изолированного ребра, произвольно расположенного в плоскости. Учитывая условия совместности в обобщенных перемещениях, можно легко перестроить матрицу изолированного элемента в матрицу жесткости элемента, однозначно ориентированного в пределах определенного участка оболочки. Ниже излагается алгоритм построения матрицы жесткости элемента ребра, поскольку принцип построения матрицы жесткости подкрепляемого элемента оболочки был изложен ранее.

Как было показано в главе I, потенциальная энергия ребра с учетом совместности в обобщенных перемещениях ребра и элемента оболочки имеет вид

$$V_p = \frac{1}{2} \int\limits_{l_p} \left[EF \left(\frac{\partial u}{\partial l} - k_p w \right)^2 - 2\eta EF \left(\frac{\partial u}{\partial l} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - k_p w \right) \left(k_p \frac{\partial u}{\partial l} + \frac{\partial^2 w}{\partial l^2} \right) + EJ_p \left(k_p \frac{\partial u}{\partial l} + \frac{\partial^2 w}{\partial l^2} \right)^2 \right] dl. \quad (20.1)$$

В этом случае используем следующие полиномы.

1. Для первой производной от перемещения вдоль оси ребра с учетом возможности смещения как жесткого тела

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{(u_s - u_r)\, x_{sr} + (v_s - v_r)\, y_{sr}}{l_p^2} +$$

$$+ k_p \left[w_s + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_s x_{rs} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_s y_{rs} \right] \left(1 - \frac{l}{l_p} \right) +$$

$$+ k_p \left[w_r + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_r x_{sr} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_r y_{sr} \right] \frac{l}{l_p}, \quad (20.2)$$

где l_p – длина элемента ребра; k_p – кривизна элемента ребра.

2 Для поперечных перемещений

$$w = w_r Э_1 + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_r x_{sr} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_r y_{sr} \right] \frac{1}{l_p} Э_2 +$$

$$+ w_s Э_3 + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_s x_{sr} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_s y_{sr} \right] \frac{1}{l_p} Э_4, \quad (20.3)$$

где $Э_1, \dots, Э_4$ – полиномы Эрмита [29].

3. Для второй производной от прогиба

$$\frac{\partial^2 w}{\partial l^2} = \frac{1}{l_p^2} \left[6(w_s - w_r) - 4 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_r x_{sr} - 4 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_r y_{sr} - \right.$$

$$\left. - 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_s x_{sr} - 2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_s y_{sr} \right] \left(1 - \frac{l}{l_p} \right) +$$

$$+ \frac{1}{l_p^2} \left[6(w_r - w_s) + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_r x_{sr} + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_r y_{sr} + \right.$$

$$\left. + 4 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_s x_{sr} + 4 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_s y_{sr} \right] \frac{l}{l_p}. \quad (20.4)$$

Если ввести полный вектор узловых обобщенных перемещений

$$\{q\} = \{ q_1 \;\; q_2 \;\; q_3 \dots q_m \},$$

то зависимости (20.2)–(20.4) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \sum_{p=1}^{m} Э^1_{pu}(l)\, q_p; \\ w &= \sum_{p=1}^{m} Э_{pw}(l)\, q_p; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial l^2} &= \sum_{p=1}^{m} Э''_{pw}(l)\, q_p, \end{aligned} \right\} \quad (20.5)$$

где

$$\{q\} = \left\{ u_r \;\; v_r \;\; w_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_r \; \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_r \;\; u_s \;\; v_s \;\; w_s \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_s \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_s \right\} \quad (20.6)$$

– вектор узловых неизвестных для элемента ребра.

Для сокращения занимаемой памяти и машинных операций нет необходимости строить данную матрицу исходя из полного вектора неизвестных подкрепляемого элемента. Целесообразно сформировать матрицу жесткости ребра исходя из размерности вектора (20.6), а затем с помощью специального алгоритма разослать коэффициенты этой матрицы по соответствующим адресам.

Тогда коэффициенты матрицы жесткости подкрепляющего элемента будут определяться зависимостью

$$(K_{mn})_p = \int\limits_{l_p} \Big[EF \left(1 - 2\eta K_p + \frac{J}{F} k_p^2 \right) Э'_{mu} Э'_{nu} +$$

$$+ EFk_p^2 Э_{mw} Э_{nw} + EJ\, Э''_{mw} Э''_{nw} +$$

$$+ EF(\eta k_p^2 - k_p)(Э'_{mu} Э_{nw} + Э'_{nu} Э_{mw}) +$$

$$+ EF\left(\frac{J}{F} k_p - \eta \right)\left(Э'_{mu} Э''_{nw} + Э'_{nu} Э''_{mw} \right) +$$

$$+ \eta k_p EF\, (Э''_{mw} Э_{nw} + Э''_{nw} Э_{mw}) \Big] dl. \tag{20.7}$$

Если ввести обозначения:

$$\left. \begin{array}{l} A = EF\left(1 - 2\eta k_p + \dfrac{J}{F} k_p^2\right); \quad B = (\eta k_p - 1)\, EF k_p; \\ C = EF k_p^2; \quad D = EJ\, k_p - \eta EF; \quad P = \eta k_p EF; \quad S = EJ, \end{array} \right\} \tag{20.8}$$

$$[K_{ij}] = \left[\begin{array}{cccccccccc} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & -k_6 & -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & -k_5 \\ & k_6 & k_7 & k_8 & k_8 & -k_1 & -k_6 & k_7 & -k_5 & -k_8 \\ & & k_9 & k_{10} & k_{11} & -k_3 & -k_7 & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & & & k_{15} & k_{16} & -k_4 & -k_5 & -k_{13} & k_{17} & k_{18} \\ & & & & k_{19} & -k_5 & -k_8 & -k_{14} & k_{18} & k_{20} \\ & \text{Симметрично} & & & & k_1 & k_2 & -k_3 & k_4 & k_5 \\ & & & & & & k_6 & -k_7 & k_5 & k_8 \\ & & & & & & & k_9 & -k_{10} & -k_{11} \\ & & & & & & & & k_{15} & k_{16} \\ & & & & & & & & & k_{19} \end{array} \right] \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \end{array}$$

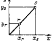


Рис. 23. Макет матрицы жесткости элемента ребра.

то коэффициенты матрицы жесткости ребра (рис. 23) принимают следующие значения:

$$\left. \begin{array}{ll} k_1 = A x_{sr}^2 / l_p^3; & k_{11} = L_4 y_{sr}, \\ k_2 = A x_{sr} y_{sr} / l_p^3; & k_{12} = L_5; \\ k_3 = L_1 x_{sr} / 2 l_p; & k_{13} = L_6 x_{sr}; \\ k_4 = L_2 x_{sr}^2 / l_p; & k_{14} = L_6 y_{sr}; \\ k_5 = L_2 x_{sr} y_{sr} / l_p; & k_{15} = L_7 x_{sr}; \\ k_6 = A y_{sr}^2 / l_p^3; & k_{16} = L_7 x_{sr} y_{sr}; \\ k_7 = L_1 y_{sr} / 2 l_p; & k_{17} = L_8 x_{sr}^2; \\ k_8 = L_2 y_{sr}^2 / l_p; & k_{18} = L_8 x_{sr} y_{sr}; \\ k_9 = L_3; & k_{19} = L_7 y_{sr}^2; \\ k_{10} = L_4 x_{sr}; & k_{20} = L_8 y_{sr}^2, \end{array} \right\} \tag{20.9}$$

где

$$\left. \begin{array}{c} L_1 = -(A k_p + B); \\ L_2 = -\left(\dfrac{1}{2} A k_p + \dfrac{1}{12} B + D \dfrac{1}{l_p^2} \right); \\ L_3 = \dfrac{1}{3} l_p A k_p + \dfrac{3}{10} l_p B k_p + 2 D k_p \dfrac{1}{l_p} + \\ + \dfrac{13}{15} C l_p - \dfrac{12}{15} \dfrac{P}{l_p} + 12 \dfrac{S}{l_p^3}; \\ L_4 = \dfrac{1}{3} A k_p^2 + \dfrac{1}{30} l_p B k_p + D k_p \dfrac{1}{l_p} + \\ + 6 \dfrac{S}{l_p^3} + \dfrac{11}{210} C l_p - \dfrac{6}{5} \dfrac{P}{l_p}; \end{array} \right\} \tag{20.10}$$

$$L_5 = \frac{1}{6} A l_p k_p^2 + \frac{7}{10} l_p B k_p - 2 D k_p \frac{1}{l_p} - $$

$$- 12 \frac{S}{l_p^3} + \frac{9}{10} C l_p - \frac{12}{5} \frac{P}{l_p};$$

$$L_6 = - \frac{1}{6} A l_p k_p^2 - \frac{2}{5} B l_p k_p + 2 D k_p \frac{1}{l_p} +$$

$$+ 6 \frac{S}{l_p^3} - \frac{13}{420} C l_p - \frac{1}{5} \frac{P}{l_p};$$

$$L_7 = \frac{1}{3} A l_p k_p^2 + \frac{1}{15} B l_p k_p + 4 \frac{S}{l_p^3} +$$

$$+ \frac{1}{105} C l_p - \frac{4}{15} \frac{P}{l_p};$$

$$L_8 = - \frac{1}{6} A l_p k_p^2 - \frac{1}{10} B l_p k_p + 2 D k_p \frac{1}{l_p} +$$

$$+ 2 \frac{S}{l_p^3} - \frac{1}{140} C l_p + \frac{1}{15} \frac{P}{l_p}.$$

В ряде случаев возникает необходимость учета жесткости ребер на кручение. Тогда потенциальная энергия ребра будет слагаться из потенциальной энергии изгиба (20.1) и энергии кручения ребер жесткости, выражение для которой имеет вид

$$V_{кр} = \frac{1}{2} \int\limits_{l_p} G J_{кр} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} \right)^2 dl. \qquad (20.11)$$

Полагая, что угол закручивания ребра постоянен в пределах его элемента, получаем

$$V_{кр} = \frac{1}{2} l_p G J_{кр} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} \right)^2, \qquad (20.12)$$

где

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s} = \frac{1}{l_p} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_s - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_r \right].$$

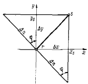


Рис. 24. К определению угла закручивания ребра жесткости.

В соответствии с обозначениями, принятыми на рис. 24, можно записать

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{\partial n} + \frac{dw}{\partial y} \frac{dy}{dn} \approx$$

$$\approx \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\Delta x}{\Delta n} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\Delta y}{\Delta n},$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta x}{\Delta n} &= \frac{x_{sr}}{\Delta n} = \sin \varphi = \frac{y_{sr}}{l_p}; \\ \frac{\Delta y}{\Delta n} &= \frac{y_{sr}}{\Delta n} = \cos \varphi = \frac{x_{sr}}{l_p}, \end{aligned} \right\} \qquad (20.13)$$

т. е.

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \sin \varphi + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos \varphi.$$

Таким образом, коэффициенты матрицы жесткости при учете кручения ребра равны

$$(k_{mn})_p = (k_{mn})_p^{изг} + (k_{mn})_p^{кр}. \qquad (20.14)$$

§ 21. Машинный алгоритм стыковки элементов матрицы жесткости пологой оболочки и элементов матрицы жесткости подкрепляющих ребер

При формировании матриц жесткости конечных элементов пластин или пологих оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, будем предполагать, что в пределах элемента имеется не более двух ребер. Принимать большее количество нерационально. Первоначально строятся матрицы жесткости конечных элементов, которые учитывают одновременно изгиб и плоское напряженное состояние. Затем формируется матрица жесткости подкрепляющего ребра. Здесь возможны два варианта. Первый заключается в том, что эти два этапа совмещены и вычисления коэффициентов двух матриц производятся в любом случае, если было обращение к подпрограмме формирования матрицы жесткости подкрепленного элемента. Тогда в случае отсутствия подкрепляющего ребра по какой-либо кромке соответствующие характеристики ребра принимаются равными нулю и формируется матрица ребра нулевой жесткости на растяжение,

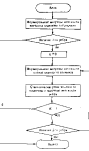


Рис. 25. Блок-схема формирования полной матрицы жесткости подкрепленного элемента.

изгиб и кручение. Однако этот подход приводит к заданию большого количества лишней исходной информации и к затрате машинного времени на формирование нулевой матрицы.

Во втором случае формирование матрицы жесткости ребра производится только при наличии подкрепления по той или иной кромке в соответствии с блок-схемой, изображенной на рис. 25. При наличии подкрепляющих ребер необходимы данные о характере топологии системы ребер и параметрах элементов ребер. Их можно представить в виде табл. 4, где с помощью характеристик ТП и ВП сообщается вся необходимая информация о размещении ребер в пределах элемента и параметров, которые находятся в массиве исходных данных по значению признака ТП.

Вариант подкрепления определяется в соответствии со схемой возможных подкреплений, представленной на рис. 26.

Рассмотрим обобщенную схему формирования полной матрицы жесткости подкрепленного элемента пластины. Не ограничивая изложение видом конечного элемента, будем предполагать, что подкрепляемый элемент имеет $K\ U$ узлов и не больше двух подкрепляющих ребер.

Размерность вектора узловых неизвестных равна $K\ U \times 5$. Все массивы полагаются одномерными.

Введем следующие обозначения:

S G – строка жесткости элемента;

S G R – строка жесткости элемента ребра;

Таблица 4. Таблица характеристик подкрепленных элементов

Тип параметров (ТП)	Вариант подкрепления (ВП)	Номера подкрепленных элементов с данными ТП и ВП						
1	4	10	50	51	...	60	72	...
2	3	11	21					
1	5	32	43	56				

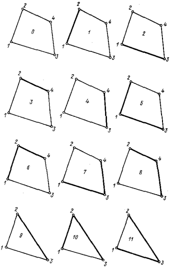


Рис. 26. Стандартные схемы подкрепления конечных элементов.

МВП – массив вариантов подкрепления;

K U – количество узлов подкрепляемого элемента;

I V – номер варианта подкрепления.

1. Формирование матрицы жесткости элемента пластины. Учитывая возможность эксцентричного подкрепления пластины, при определении

Таблица 5. **Массив стандартных подкреплений**

Вариант подкрепления (ВП)	Первое ребро		Второе ребро	
	Первый узел	Второй узел	Первый узел	Второй узел
1	1	2	0	0
2	1	3	0	0
3	2	4	0	0
4	3	4	0	0
5	1	2	1	3
6	1	2	2	4
7	1	3	3	4
8	2	4	3	4
9	2	3	0	0
10	1	2	2	3
11	1	3	2	3

полной энергии следует потенциальную энергию представить суммой энергий изгиба и деформации срединной поверхности, т. е. необходимо использовать выражения (7.11) и (7.12). Тогда воспользовавшись схемой алгоритма, изложенного в § 15, 16, сформируем строку жесткости неподкрепленного элемента, испытывающего изгибные и тангенциальные деформации.

2. Формирование полной матрицы жесткости подкрепленного элемента. Из массива исходных данных (табл. 4) определяются вариант подкрепления и типы геометрических и физических параметров подкрепляющих ребер. Целесообразно заносить в таблицу данные только для подкрепленных элементов. Если номер рассматриваемого элемента отсутствует в ней, следовательно, для него ВП = 0 и производится выход из подпрограммы формирования матрицы жесткости элемента. Рис. 26 отвечает массив подкреплений (табл. 5), хранящийся в памяти машины и имеющий размерность 4 x 11.

Для каждого варианта подкрепления даются номера узлов, соответствующие началу и концу подкрепляющего элемента. При отсутствии одного из подкрепляющих ребер в соответствующем месте массива

помещаются нули. Если для данного элемента вариант подкрепления равен IV, то с помощью процедуры

```
. . . . . . .
. . . . . . .
K R = 0
I H = (I V - 1) * 4 + 1
I K = I H + 1
I 1 = M B П (I H)
I 2 = M B П (I K)                    (21.1)
. . . . . . .
. . . . . . .
```

определяются номера узлов стандартного элемента, отвечающие началу и концу данного ребра. Например, $IV = 4$. Тогда $I\,1 = 3$, $I\,2 = 4$, т. е. начало подкрепляющего первого элемента совпадает с третьим узлом, а конец – с четвертым. В процедуре (21.1) предусмотрен параметр KR, по значению которого производится переход к формированию строки жесткости второго ребра.

2.1. Формирование строки жесткости первого подкрепляющего элемента. По признаку ТП определяются параметры первого подкрепляющего элемента и формируется строка жесткости. Напомним, что полный вектор узловых неизвестных для подкрепляющего элемента *имеет размерность* 2 x 5, *а не* 4 x 5, который принят для элемента пластины.

Воспользовавшись зависимостями (20.8), (20.9), моделью строки жесткости ребра (рис. 23) и параметрами элемента ребра, формируем строку жесткости первого покрепляющего ребра. В силу различия в размерностях векторов узловых неизвестных элементов подкрепляющего ребра и пластины следует предусмотреть алгоритм суммирования элементов строки жесткости ребра и элементов строки жесткости подкрепляемого элемента.

2.2. **Алгоритм стыковки.** *2.2.А. Блок определения относительных адресов элементов строки жесткости ребра*

```
        . . . . . . . .
        . . . . . . . .
        J2 = 0
        J3 = 0
        NU1 = (I1 - 1) * 5
        NU2 = (I2 - 1) * 5
        IF (NU1) 12, 14, 12
14      J2 = 0
        GϕTϕ 15
12      Dϕ 16 K1 = 1, NU1
16      J2 = J2 + (K1 - 1)
15      Dϕ 17 K1 = 1, NU2
17      J3 = J3 + (K1 - 1)
        J4 = KU * (I1 - 1) * 25 - J2
        J5 = KU * (I2 - 1) * 25 - J3
        J6 = (KU - I1 + 1) * 5
        J7 = (KU - I2 + 1) * 5
        J1 = 0
        Dϕ 18 K2 = 1,5
        J1 = J1 + (K2 - 1)
        Dϕ 19 K3 = K2,5
        M = (K2 - 1) * 10 + K3 - J1
        M1 = (K2 - 1) * 5 + K3 - J1 + 40
        MK = (K2 - 1) * J6 + K3 - J1
        M3 = (K2 - 1) * J7 + K3 - J1
        M4 = J4 + MK
        M5 = J5 + M3
```


2.2.Б. Блок стыковки

```
        SG (M4) = SG (M4) + SGR (M)
        SG (M5) = SG (M5) + SGR (M1)
19      CϕNTINUE
        Dϕ 22 K4 = 1,5
        K = M4 + (I2 - I1) * 5 + K4 - 5
22      SG (K) = SGK) + SGR (M + K4)
18      CϕNTINUE
```

На этом работа с элементами строки жесткости первого подкрепляющего ребра заканчивается. Следующим этапом является алгоритм формирования строки жесткости второго ребра и стыковки ее элементов с элементами основной матрицы. Если второго подкрепляющего ребра жесткости для данного элемента нет, то осуществляется выход из подпрограммы формирования полной матрицы (строки) жесткости подкрепленного элемента.

2.3. **Блок проверки наличия второго подкрепляющего ребра и выхода из подпрограммы**

```
        . . . . . . . . . .
        . . . . . . . . . .
        IF (KR - 1) 25, 26, 26
25      IH = IK + 1
        IK = IH + 1
        I1 = MBП (IH)
        IF (I1) 27, 26, 27
27      KR = 1
        GϕTϕ 1
26      RETURN
        END
```

Отличительной стороной рассмотренной подпрограммы является то, что она может быть использована как самостоятельная программа библиотеки матриц жесткости и, что самое важное, входит без изменений как подпрограмма в алгоритм вычисления матриц жесткости конечных элементов треугольной и четырехугольной форм.

§ 22. Оценка точности решения на тестовых задачах

Для оценки точности численных методов решения и проверки правильности работы алгоритма решения задач теории упругости выбран ряд

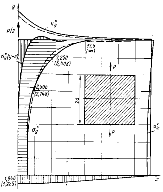


Рис. 27. Распределение тангенциальных перемещений и напряжений σ_y^0 при загрузке квадратной пластины сосредоточенными силами:

——— – решение МКЭ; — — – аналитическое решение; в скобках – результаты аналитического решения.

тестовых задач, аналитическое решение которых дано в замкнутом виде, выраженном через элементарные функции.

1. Плоская деформация квадратной пластины под действием двух сосредоточенных сил. Разбивка на четырехугольные элементы показана на рис. 27. В пределах элемента перемещения интерполировались квазилинейными функциями, что достигалось двойной триангуляцией каждого четырехугольника. Напряжения и перемещения представим в виде

Таблица 6. **Прогибы в центре свободно опертой пластины**

Размер сетки	Распределенная нагрузка		Сосредоточенная сила	
	Численные решения			
	I	II	I	II
2 x 2	0,4215	0,3444	0,137	0,139
4 x 4	0,4110	0,3945	0,124	0,125
8 x 8	0,4077	0,4040	0,118	0,117
12 x 12	0,4071	–	0,117	
16 x 16	0,4065	0,4058	0,116	0,117
Точное решение	0,4062		0,116	
Множитель	$\frac{Qa^4}{D}10^{-2}$		$\frac{Pa^2}{D}10^{-1}$	

Таблица 7. **Прогибы в центре жестко заделанной пластины**

Размер сетки	Распределенная нагрузка		Сосредоточенная сила	
	Численные решения			
	I	II	I	II
2 x 2	0,157	0,094	0,682	0,614
4 x 4	0,134	0,119	0,599	0,574
8 x 8	0,129	0,127	0,573	0,568
12 x 12	0,127	–	0,567	
16 x 16	0,127	0,128	0,565	0,562
Точное решение	0,127		0,560	
Множитель	$\frac{Qa^4}{D}10^{-2}$		$\frac{Pa^2}{D}10^{-2}$	

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x = \frac{P}{2a}\,\sigma_x^0; \quad \sigma_y = \frac{P}{2a}\,\sigma_y^0;\\
\sigma_{xy} = \frac{P}{2a}\,\sigma_{xy}^0;\\
u = \frac{1-\nu^2}{E}\,P u^0; \quad v = \frac{1-\nu^2}{E}\,P v^0,
\end{aligned}\right\} \qquad (22.1)
$$

где a – половина стороны квадрата.

На рис. 27 приведены результаты расчета на редкой сетке с числом узлов, равным 81 для четверти квадрата. При этом жесткое смещение

Таблица 8. **Нормальные напряжения в центре свободно опертой квадратной пластины**

Размер сетки	Распределенная нагрузка		Сосредоточенная сила	
	Численные решения			
	I	II	I	II
2 x 2	3,283	2,656	1,804	1,391
4 x 4	2,985	2,816	2,193	1,483
8 x 8	2,902	2,837	2,619	1,511
12 x 12	2,887		2,869	–
16 x 16	2,880	2,869	3,001	1,520
Точное решение	2,873		–	
Множитель	$Qa^2 \cdot 10^{-1}$		P	

Таблица 9. **Максимальные напряжения в центре жестко заделанной квадратной пластины**

Размер сетки	Распределенная нагрузка		Сосредоточенная сила	
	Численные решения			
	I	II	I	II
2 x 2	1,696	1,242		1,258
4 x 4	1,520	1,344	1,876	1,363
8 x 8	1,412	1,38	2,297	1,385
12 x 12	1,391		2,547	–
16 x 16	1,386	1,374	2,679	1,388
Точное решение	1,386			
Множитель	$Qa^2 \cdot 10^{-1}$		P	

Таблица 10. **Максимальные напряжения в заделке жестко заделанной квадратной пластины**

Размер сетки	Распределенная нагрузка		Сосредоточенная сила	
	Численные решения			
	I	II	I	II
2 x 2	–3,124	–1,806	–	–0,438
4 x 4	–3,095	–2,622	–0,786	–0,648
8 x 8	–3,092	–2,964	–0,757	–0,732
12 x 12	–3,087	–	–0,757	–
16 x 16	–3,084	–3,102	–0,756	–0,774
Точное решение	–3,084		–0,756	
Множитель	$Qa^2 \cdot 10^{-1}$		P	

квадрата исключалось путем полного закрепления точки O и закрепления точки A от перемещения вдоль оси x.

Приведенные данные позволяют заключить, что даже для задачи с сосредоточенной силой при низком порядке аппроксимации и на сравнительно редкой сетке МКЭ дает удовлетворительные результаты уже на некотором расстоянии от точки приложения силы. Более точное решение можно получить путем выделения особенности задачи.

2. Изгиб квадратной пластины, загруженной равномерно распределенной нагрузкой. В работах [12, 29] указанная задача рассмотрена при условиях свободного опирания пластины и жесткого защемления по контуру.

На основании симметрии загрузки и условий закрепления пластины в расчетах рассматривалась только четвертая часть исследуемой области, которая аппроксимировалась прямоугольными конечными элементами. Число конечных элементов принималось равным 4, 16, 64, 144, 256, коэффициент Пуассона во всех случаях равнялся 0,3.

В табл. 6–10 приведены значения прогибов и напряжений, которые определены в наиболее напряженных точках квадратной пластины. Численные решения, полученные на основе рассмотренной методики (в таблицах обозначены цифрой I), сопоставляются с результатами, приведенными в [29] (в таблицах обозначены цифрой II) и точным решением [35].

3. Изгиб квадратной пластины, загруженной сосредоточенной силой P в центре. Результаты решения данной задачи приведены в табл. 6–10 совместно с результатами предыдущего решения. При использовании рассматриваемого подхода наблюдается более интенсивный рост напряжений в центре пластины при уменьшении размеров элементов, чем в случае использования несовместного прямоугольного и треугольного элементов.

Во всех рассмотренных случаях *наблюдается монотонная сходимость* к точному решению исследуемых задач. Для исследования точности счета на основе рассмотренной методики в районе особых точек рассмотрим еще один пример.

4. Симметричный изгиб свободно опертой квадратной пластины, которая загружена равномерно распределенной нагрузкой, действующей на квадрат со сторонами $\lambda \times \lambda$ *(рис. 28). Результаты расчета коэффициентов* β изгибающих моментов M_1 и M_2 в центре пластины показаны на рис. 29. Здесь же сплошной линией приведены значения коэффициентов β, полученные аналитическим методом С. П. Тимошенко [35].

Анализируя результаты, можно отметить, что наблюдается удовлетворительное соответствие аналитических и численных решений в окрестности особых точек.

Чтобы оценить точность решения при использовании произвольных четырехугольных конечных элементов на исследуемую область квадратной свободно опертой и жестко заделанной пластин наносилась произвольная сетка, характер которой представлен на рис. 30.

На рис. 31 сделано сопоставление результатов численного расчета напряжений в рассматриваемой пластине, полученных при использовании регулярной и произвольной сеток, когда число конечных элементов равнялось 144. Значения нормальных напряжений сравниваются в точках пластины, лежащих на диагонали λ. Необходимость такого сравнения объясняется тем, что при произвольной сетке напряжения определяют обычно в центре тяжести элемента. Поэтому сетка наносилась таким

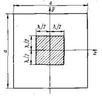


Рис. 28. Расчетная схема квадратной свободно опертой пластины при изгибе нагрузкой интенсивности Q, равномерно распределенной по квадрату со сторонами $\lambda \times \lambda$.

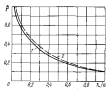


Рис. 29. Изменение коэффициента $\beta = M^{\max}/P$ для свободно опертой, частично загруженной квадратной пластины ($\nu = 0{,}3$).

1 – точное решение; *2* – решение по МКЭ.

образом, чтобы диагональные конечные элементы были симметричны относительно оси λ. В этом случае центры тяжестей элементов при правильной и произвольной разбивке лежат на одной прямой.

Как видно из рис. 31, значения *напряжений, вычисленных в центрах* тяжести четырехугольных конечных элементов, хорошо вписываются в эпюры распределения напряжений, найденных при использовании регулярной сетки.

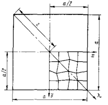


Рис. 30. Принципиальная схема разбивки пластины на произвольные четырехугольные элементы.

Следующий рассмотренный пример устанавливает соответствие между аналитическим и численным решениями при исследовании осесимметричного изгиба свободно опертой на жесткие диафрагмы цилиндрической оболочки.

На рис. 32 приведены результаты расчета оболочки, находящейся под действием бокового равномерного давления. Сплошной линией показана кривая изменения прогиба оболочки согласно точному решению [35]; пунктиром и штрих-пунктиром показаны прогибы той же оболочки при использовании метода *конечных элементов* соответственно при числе конечных элементов $m = 8$ вдоль оболочки; $n = 8$ в поперечном направлении и $m = 16$, $n = 8$. Видим, что уже при $m = n = 8$ метод конечных элементов приводит к удовлетворительному результату в отношении прогибов оболочки.

На основании анализа выполненных численных *экспериментов* можно сделать вывод о том, что степень соответствия полученных решений по МКЭ с использованием рассмотренных матриц жесткости вполне удовлет-

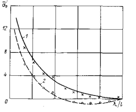


Рис. 31. Сравнительная оценка изменения относительных напряжений $\bar{\sigma}_0 = 10(\sigma/P)$ вдоль диагонали λ квадратной пластины при изгибе сосредоточенной силой P.

– решение с помощью прямоугольных элементов; ×, ○ – с помощью четырехугольных элементов; *1* – свободное опирание; *2* – жесткое защемление.

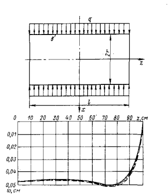


Рис. 32. Сопоставление прогибов для тонкой цилиндрической оболочки, находящейся под действием бокового давления.

——— – точное решение; – – – – – – расчет по МКЭ при сетке 8 x 8; –·–·– – МКЭ при сетке 8 x 14, r = 100 см; l = 200 см.

ворительная даже при крупной разбивке пластины на конечные элементы. Уменьшение размеров конечных элементов обеспечивает сходимость результатов к точному решению.

§ 23. Примеры решения задач

Рассмотрим некоторые результаты решений задач, полученных с использованием приема независимой аппроксимации элементов функционала. Основные результаты получены при довольно крупной сетке, но дающей возможность отразить общее напряженно-деформированное состояние с достаточной точностью.

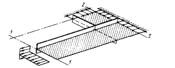


Рис. 33. Расчетная схема палубного перекрытия при решении плоской задачи теории упругости.

Для оценки характера напряженного состояния с большим градиентом следует воспользоваться приемом выделения соответствующих областей и построения уточненной расчетной схемы, что и было выполнено в необходимых случаях.

Исследование напряженного состояния палубных перекрытий. Плоская задача теории упругости. Рассмотрим палубное перекрытие, изображенное на рис. 33. В районе закругления в углу люкового отверстия используется произвольная сетка (рис. 34), дающая возможность приближенно оценить напряженное состояние в этой зоне.

При построении расчетной схемы предполагалось, что перекрытие симметрично относительно осей *1–1* и *2–2*. Такое предположение накладывает особые условия на характер продольных перемещений точек, лежащих в сечениях *1–1* и *2–2*.

Условие симметрии относительно оси *2–2* дает возможность считать перемещения точек, лежащих на этой оси, равными нулю. Симметричность перекрытия относительно оси *1–1* приводит к равномерному закону распределения продольных перемещений точек, лежащих в этом сечении, что и было отражено при численной реализации алгоритма расчета рассматриваемого перекрытия. Использова-

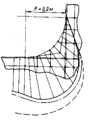


Рис. 34. Дискретизация области с особенностями и распределение главных напряжений вдоль кромки выреза.

——— – распределение при неразрезном комингсе; –·–·– – то же при разрезном комингсе; – – – – – без подкрепления; α_0 – коэффициент концентрации напряжений; σ_1 – главное напряжение; $\sigma_{1-1}^{ср}$ – среднее напряжение в сечении *1–1* (см. рис. 33); $\alpha_0 = \sigma_1/\sigma_{1-1}^{ср}$; $\alpha_0^{m.п} \approx 1{,}64$; $\alpha_0^{max} \approx 2{,}14$.

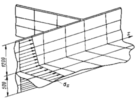


Рис. 35. Схема дискретизации при решении плоской задачи теории упругости и распределение продольных напряжений по высоте комингса и палубе.

лись две расчетные схемы. Первая схема предполагала представление палубных пластин и подкрепляющих продольных и поперечных балок (комингсы, бимсы) системой конечных элементов (рис. 35).

При реализации второй схемы стрингеры и бимсы были представлены как балки. Учитывался эксцентриситет центров тяжестей сечений подкрепляющих ребер, т. е. использовалась схема, отраженная в предыдущих параграфах и главах. Более того, чтобы оценить влияние общего изгиба корпуса судна на плоское напряженное состояние палубных пластин, вторая расчетная схема представляла собой идеализированный отсек, симметричный относительно осей *1–1*, *2–2* и загруженный в сечении *1–1* изгибающим моментом M (рис. 36).

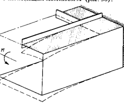


Рис. 36. Идеализация отсека при оценке напряженно-деформированного состояния пластин палубного перекрытия.

Особенности продольных перемещений кромок палубы сечений *1–1* и *2–2* отвечали расчетной схеме 1.

Результаты расчетов по двум рассмотренным схемам представлены на рис. 37. Цифрой *1* обозначены результаты расчета по первой схеме, цифрой *2* – по второй. Из сравнения этих данных видно, что различия в результатах находятся в пределах точности принятых схем дискретизации.

Вторая расчетная схема была реализована при следующих предположениях: в пределах борта и днища справедлива гипотеза плоских сечений; пластины борта и днища не редуцируются.

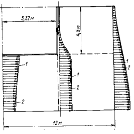


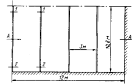
Рис. 37. Сравнение результатов по двум расчетным схемам.

——— – результаты решения плоской задачи теории упругости; – – – – – результаты расчета с учетом пространственного деформирования отсека.

При принятых допущениях характер поперечных деформаций палубного перекрытия имеет вид, показанный на рис. 36. При перегибе корпуса судна наблюдается прогиб палубного перекрытия. Следует учесть, что в рассматриваемом случае не были учтены подкрепляющие связи, кроме указанных. Поэтому деформация связей палубы, отраженная на этом рисунке, характеризует лишь качественную сторону явления. Такой подход вполне приемлем, поскольку в данном случае устанавливалось лишь соответствие между двумя расчетными схемами при оценке плоского напряженного состояния.

Поперечный изгиб перекрытий. Прежде всего рассмотрим цилиндрический изгиб простейшего перекрытия под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 38). В этом случае реализуется классическая схема привлечения к работе поясков широкополых балок. Распределение цепных напряжений в сечениях по ширине перекрытия показано на рис. 39. Рассмотренный „классический" характер распределения цепных напряжений, как результат взаимодействия обшивки и подкрепляющих ребер, в реальных судовых перекрытиях встречается довольно редко. Поэтому дать определенные рекомендации к определению величины присоединенных поясков широкополых балок в общем случае бывает довольно трудно.

Оценить влияние более сложного изгиба на привлечение поясков балок к работе можно, рассмотрев, например, изгиб перекрытия, свободно опертого по контуру на жесткий контур (рис. 40).



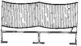


Рис. 39. Распределение цепных напряжений в сечениях простейшего перекрытия.

1 – сечения *1–1*; *2* – сечение *2–2*.

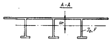


Рис. 38. Расчетная схема простейшего перекрытия.

$I_0 = 20,6 \cdot 10^{-4}$ м^4; $F = 1,76 \cdot 10^{-2}$ м^2; $\eta = 0,604$ м.

Интересно сравнить расчет сложного перекрытия по уточненной схеме с расчетом этого же перекрытия, но при стержневой аппроксимации, н/с привлечением понятия присоединенного пояска, определяемого по известным зависимостям (рис. 42).

В этом случае поперечная нагрузка должна быть представлена совокупностью сосредоточенных сил, прикладываемых в узловых точках.

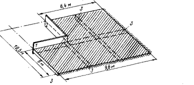


Рис. 40. Расчетная схема палубного перекрытия на действие поперечной нагрузки.

$I_1^0 = 1,54 \cdot 10^{-4}$ м^4; $I_2^0 = 137 \cdot 10^{-4}$ м^4; $I_3^0 = 3,8 \cdot 10^{-4}$ м^4; $F_1 = 4,28 \cdot 10^{-2}$ м^2; $F_2 = 4,04 \cdot 10^{-2}$ м^2; $F_3 = 1,68 \cdot 10^{-2}$ м^2; $\eta_1 = -0,357$ м; $\eta_2 = -0,307$ м; $\eta_3 = -0,335$ м.

Это дает возможность исключить местный изгиб пластин между ребрами и обеспечить соответствие в силовой схеме для двух сопоставляемых вариантов расчета.

Распределение цепных напряжений в поле перекрытия, отвечающее уточненной постановке, носит довольно сложный характер, что хорошо

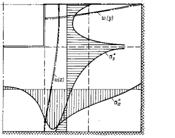


Рис. 41. Кривые распределения прогиба подкрепляющих балок w (x, y) и цепных напряжений $\sigma_{x(y)}$ в сечениях палубного перекрытия.

——— – уточненная схема расчета; –·–·– – стержневая схема аппроксимации.

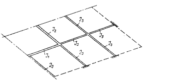


Рис. 42. Стержневая аппроксимация палубного перекрытия.

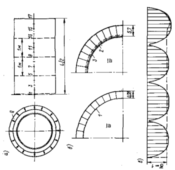


Рис. 44. Деформация подкрепленной равноотстоящими шпангоутами цилиндрической оболочки и распределение поперечных цепных напряжений в обшивке оболочки: *а* — расчетная схема; *б* — деформация оболочки в сечениях 1, 2, 3, $\overline{w} = w(Eh^3/QR)$; *в* — распределение цепных напряжений, $\overline{\sigma}_t = \sigma_t h/QR$; ——— подкрепленная оболочка; - - - - неподкрепленная оболочка.

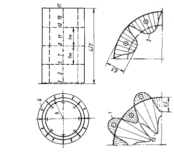


Рис. 43. Характер деформации цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами и стрингерами.
——— деформация в *i*-м сечении подкрепленной оболочки; - - - - деформация неподкрепленной оболочки.

видно из рис. 41. Естественно, отразить его при стержневой аппроксимации перекрытия не представляется возможным. Но при оценке такой интегральной характеристики, как прогиб, обе расчетные схемы приводят практически к одинаковым результатам. Рассмотренный пример не дает *оснований говорить, что такое соответствие будет всегда. Но известно*, что при определенных соотношениях геометрических параметров подкрепляющих ребер и обшивки обе расчетные схемы могут приводить к близким результатам, что и подтверждает рассмотренный пример.

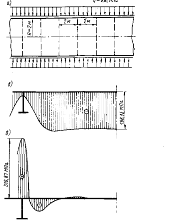


Рис. 45. Распределение напряжений в сечениях бесконечной оболочки, подкрепленной шпангоутами: *а* — расчетная схема; *б* — распределение поперечных цепных напряжений в обшивке оболочки; *в* — распределение продольных изгибных напряжений.

Деформация цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. Рассмотрены несколько вариантов подкрепления цилиндрической оболочки и оценено их влияние на поведение оболочки под действием бокового давления Q. Для всех случаев подкрепляющие стрингеры и шпангоуты имели следующие характеристики:

$$J^0_{\text{шп}} = 0{,}14 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^4; \quad J^0_{\text{стр}} = 1{,}09 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^4;$$

$$F_{\text{шп}} = 0{,}30 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^2; \quad F_{\text{стр}} = 0{,}60 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^2;$$

$$\eta_{\text{шп}} = 0{,}135\ \text{м}; \quad \eta_{\text{стр}} = 0{,}268\ \text{м}.$$

Толщина оболочки равнялась 1 см и радиус $R = 2$ м. Остальные данные приведены на соответствующих расчетных схемах. Наиболее характерные результаты приведены на рис. 43—45.

В заключение следует отметить, что представленные в данном параграфе примеры расчета не могут быть использованы для конкретных обобщений в силу ограниченности информации. Они служат лишь иллюстрацией круга задач, который может быть рассмотрен с помощью полученных матриц жесткости. По этой причине в основном мы ограничивались представлением качественной картины напряженно-деформированного состояния той или иной задачи, не отвлекая внимания конкретными числовыми результатами.

§ 24. Некоторые замечания к рассмотренному алгоритму

Алгоритм поэлементной аппроксимации компонентов функционала, рассмотренный выше, базируется на симплексных полиномах. Ограничиваясь этими полиномами, мы тем самым предопределяем порядок сходимости решений. Если не касаться частных задач, то в общем она будет находиться на уровне сходимости решений, полученных с помощью несовместных полиномов при минимальном возможном числе узловых неизвестных. Например, при решении задач изгиба жестких пластин с помощью четырехугольных элементов это число равно двенадцати. Здесь мы сравниваем решение только с решениями, монотонно сходящимися к точным. Эту особенность необходимо иметь в виду при исследовании напряженно-деформированного состояния в местах с большим градиентом исследуемых параметров.

Для улучшения сходимости решений задач поперечного изгиба при аппроксимации поперечной составляющей перемещения можно воспользоваться полиномом более высокой степени, оставив неизменным алгоритм аппроксимации для всех других элементов функционала. Это даст возможность более точно учесть работу поперечной нагрузки и несколько ускорить сходимость решения.

Симплексные полиномы при аппроксимации поперечной составляющей полного перемещения фактически отражают перемещение элемента как жесткого тела. Такой характер аппроксимации приводит к нулевой относительной линейной деформации при расчете оболочек с учетом смещения элементов как твердого тела. Для возможности учета упругой деформации, связанной с поперечной составляющей перемещения, необходим более высокий порядок аппроксимации прогиба, что и было сделано при изложении одного из способов построения матрицы жесткости прямоугольного элемента оболочки.

Последнее замечание касается схемы дискретизации. Необходимо избегать таких элементов, у которых две смежные стороны равны и равнонаклонены к одной из осей координат. В этом случае мы приходим к вырожденному решению. Последнее замечание не является столь серьезным, поскольку всегда можно легко избежать такой ситуации. Тем более что она носит слишком частный характер.

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНАЯ ПРОЦЕДУРА В СХЕМЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

§ 25. Особенности вариационно-разностного метода. Достоинства и недостатки

В предыдущих главах рассмотрены некоторые варианты построения разрешающих уравнений на основе полиномиальной аппроксимации компонентов перемещения точек срединной поверхности элементов или частных производных от компонентов перемещения. Были получены матрицы жесткости для треугольных и четырехугольных элементов при соблюдении минимума машинных операций, связанных с интегрированием. Операции интегрирования можно избежать не только использованием L-координат, но и при применении вариационно-разностной процедуры в методе конечных элементов, которая является более совершенной версией вариационно-разностного метода (ВРМ). Этот метод может быть также основан на принципе Лагранжа и связан с минимизацией интеграла, представляющего потенциальную энергию деформации тела.

Особенностью ВРМ является то, что дискретизация в этом случае *проводится на уровне потенциальной энергии*. Разностные аналоги исходных функционалов получают путем представления интегралов в виде конечных сумм, а производной – конечно-разностными выражениями, полученными исходя из разложения искомой функции в окрестности узла элемента в ряд Тейлора.

Благодаря использованию вариационных принципов ВРМ имеет ряд достоинств, как и МКЭ. Он облегчает формулировку краевых и контактных задач и позволяет исключить из специального рассмотрения статические граничные условия, называемые естественными. Вариационная формулировка разностных уравнений облегчает доказательство существования краевых задач, исследование свойств уравнений и сходимости *решения. Матрицы алгебраических уравнений всегда симметричны.*

В то же время классический вариант ВРМ имеет существенный недостаток, который можно пояснить на примере дискретизации некоторой задачи, решение которой производится на основе функционала

$$J = J\left(u, v, w, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\right),$$

$$i, j = 1, 2.$$

Рассмотрим произвольную область, на которую нанесем основную и вспомогательную (пунктир) сетки, отражающие *контур области (рис. 46)*.

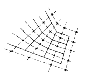


Рис. 46. Дискретизация области в классической схеме ВРМ.

При дискретизации выражения потенциальной энергии деформации срединной поверхности предполагается, что она постоянна в пределах каждого элемента, ограниченного сплошными линиями. Тогда выражение для энергии деформации срединной поверхности в дискретной формулировке будет иметь вид

$$V_{\text{ср.п}} = \sum_{p=1}^{M} (V_p)_{\text{ср.п}} S_p, \tag{25.1}$$

где S_p – площадь элемента; M – общее количество элементов.

В этом случае принципиальной разности между ВРМ и МКЭ не наблюдается.

При расчете потенциальной энергии изгиба в классической схеме ВРМ дело обстоит несколько хуже, так как в этом случае высшие производные находятся отношением приращений узловых ординат разрешающих функций, определяемых на элементах сеточной области, к расстоянию между узлами. Характерным является появление законтурных точек при аппроксимации в зоне контура, что обязывает вводить дополнительные условия для их исключения. Это нарушает стройность машинного алгоритма. Чаще для исключения законтурных точек в районе углов и контура области используют специальные разности. Но в этом случае нарушается симметричность системы уравнений, что является также недостатком этой схемы.

Исходный дискретный аналог выражения потенциальной энергии изгиба при использовании ВРМ имеет вид

$$V_{\text{и}} = \sum_{r=1}^{N} V_{r\,\text{и}} S_r, \tag{25.2}$$

где N – количество узлов основной сетки; S_r – площадь области, ограниченной линиями дополнительной сетки, в окрестности узла r. Если сравнить выражения (25.1) и (25.2), то выявится и второй недостаток – различная схема дискретизации исходного функционала. Это в свою очередь отражается на машинном алгоритме, который усложняется при использовании произвольной сетки.

§ 26. Вариационно-разностный подход в схеме метода конечных элементов

Отмеченные недостатки можно легко ликвидировать, если использовать вариационно-разностный подход в схеме метода конечных элементов. При этом предполагается, что дискретизация производится как на уровне элементов, так и внутри области элементов, т. е. предполагается, что упругий потенциал постоянен в окрестности узла элемента. Тогда дискретный аналог полной энергии системы запишется в виде

$$Э = \sum_{p=1}^{M} \sum_{r=1}^{R} Э_{pr} \frac{S_p}{R}, \tag{26.1}$$

где M – количество элементов; R количество вершин элемента; S – площадь элемента.

Система разрешающих конечно-разностных уравнений задач строительной механики образуется по методу Лагранжа, при этом используется условие стационарности

$$\frac{\partial Э}{\partial q_i} = 0, \tag{26.2}$$

где q_i – некоторое обобщенное узловое перемещение.

Чтобы не вводить вспомогательной сетки и законтурных точек, необходимо выбирать такие разностные схемы, при которых используются только неизвестные в узлах рассматриваемого элемента, т. е. строить систему уравнений, используя матрицы жесткости элементов, коэффициенты которых определялись бы из зависимости

Рис. 47. Прямоугольный конечный элемент.

$$K_{mn} = \frac{\partial}{\partial q_m \partial q_n} \sum_{r=1}^{R} V_r \frac{S}{R}, \tag{26.3}$$

где V_r – потенциальная энергия деформации элемента в окрестности узла r.

Рассмотрим этот процесс на примере построения матрицы жесткости прямоугольного элемента, изображенного на рис. 47.

Выражение для энергии изгиба в данном случае лучше представить в виде

$$\begin{aligned} V_и = \frac{D}{2} \iint_S e_{11}^2 \, dS + \frac{D}{2} \iint_S e_{13}^2 \, dS + \\ + (1 - \nu) D \iint_S e_{12}^2 \, dS + \nu D \iint_S e_{11} e_{13} \, dS, \end{aligned} \tag{26.4}$$

где интегрирование распространяется по площади элемента.

Осуществив дискретизацию функционала в пределах элемента, запишем

$$\begin{aligned} V_и = \frac{a\,b}{8} D (e_{11i}^2 + e_{11j}^2 + e_{11k}^2 + e_{11l}^2) + \\ + \frac{a\,b}{8} D (e_{13i}^2 + e_{13j}^2 + e_{13k}^2 + e_{13l}^2) + \\ + \nu \frac{a\,b}{4} D (e_{11i} e_{13i} + e_{11j} e_{13j} + e_{11k} e_{13k} + \\ + e_{11l} e_{13l}) + (1 - \nu)\, a\, b\, D e_{12m}^2 \end{aligned} \tag{26.5}$$

где e_{11i} – значение e_{11} в i-м узле и т. д.

Значение частной производной e_{12} в данном случае определяется для центра элемента в точке m.

В рассматриваемом примере приняты аппроксимирующие зависимости исходя из разложения функций в ряд Тейлора в окрестности рассматриваемой точки:

$$\left.\begin{aligned} e_{11i} &\approx \frac{2}{a^2} (q_{3k} - q_{3i}) - \frac{2}{a} q_{4i}; \\ e_{11j} &\approx \frac{2}{a^2} (q_{3l} - q_{3j}) - \frac{2}{a} q_{4j}; \\ e_{11k} &\approx \frac{2}{a^2} (q_{3i} - q_{3k}) + \frac{2}{a} q_{4k}; \end{aligned}\right\} \tag{26.6}$$

$$
\begin{aligned}
e_{11\,l} &\approx \frac{2}{a^2}\,(q_{3j} - q_{3\,l}) + \frac{2}{a}\,q_{4\,l}\,;\\
e_{13\,i} &\approx \frac{2}{b^2}\,(q_{3j} - q_{3\,i}) - \frac{2}{b}\,q_{5\,i}\,;\\
e_{13j} &\approx \frac{2}{b^2}\,(q_{3\,i} - q_{3j}) + \frac{2}{b}\,q_{5j}\,;\\
e_{13\,k} &\approx \frac{2}{b^2}\,(q_{3\,l} - q_{3k}) - \frac{2}{b}\,q_{5\,k}\,;\\
e_{13\,l} &\approx \frac{2}{b^2}\,(q_{3k} - q_{3\,l}) + \frac{2}{b}\,q_{5\,l}\,;\\
e_{12\,m} &\approx \frac{1}{a\,b}\,(q_{3\,i} - q_{3\,j} - q_{3k} + q_{3\,l}).
\end{aligned}
$$

Подставляя (26.6) в (26.5) и используя уже известные операции, получаем значения коэффициентов матрицы жесткости прямоугольного элемента, работающего на изгиб.

Матрица жесткости в развернутом виде запишется так:

$$
[K] = D
\begin{bmatrix}
k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7 & k_8 & k_9 & k_{10} & 0 & 0\\
 & k_{11} & k_{12} & k_5 & 0 & 0 & -k_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & k_{13} & -k_6 & 0 & 0 & k_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & k_1 & k_2 & -k_3 & k_{10} & 0 & 0 & k_7 & k_8 & -k_9\\
 & & & & k_{11} & -k_{12} & 0 & 0 & 0 & -k_8 & 0 & 0\\
 & & & & & k_{13} & 0 & 0 & 0 & -k_9 & 0 & 0\\
 & & & & & & k_1 & -k_2 & k_3 & k_4 & -k_5 & k_6\\
 & & & & & & & k_{11} & -k_{12} & -k_5 & 0 & 0\\
 & & \text{Симметрично} & & & & & & k_{13} & -k_6 & 0 & 0\\
 & & & & & & & & & k_1 & -k_2 & -k_3\\
 & & & & & & & & & & k_{11} & k_{12}\\
 & & & & & & & & & & & k_{13}
\end{bmatrix}
\qquad (26.7)
$$

где

$$
\left.
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{2}{a^2}\left(\frac{1}{m} + m + m^3\right); & k_8 &= \frac{1}{m\,a}\,;\\
k_2 &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{m} + \nu\, m\right); & k_9 &= -\frac{\nu}{a}\,;\\
k_3 &= \frac{1}{a}\left(m^2 + \nu\right); & k_{10} &= \frac{2\,m}{a^2}\,;\\
k_4 &= -\frac{2}{a^2}\left(m + m^3\right); & k_{11} &= \frac{1}{m}\,;\\
k_5 &= -\frac{\nu}{b}\,; & k_{12} &= \nu\,;\\
k_6 &= \frac{m}{b}\,; & k_{13} &= m\,;\\
k_7 &= -\frac{2}{a^2}\left(\frac{1}{m} + m\right); & m &= \frac{a}{b}\,.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (26.8)
$$

Как видно из (26.7) и (26.8), коэффициенты матрицы жесткости имеют очень простой вид, а сама матрица является редко заполненной, что также имеет определенное значение. Из рассмотренного примера видно, что вариационно-разностный подход хорошо вписывается в численную схему метода конечных элементов и приобретает основные его преимущества.

§ 27. Конечно-разностные зависимости для частных производных от искомых функций в узловых точках

Из предыдущего параграфа следует, что схема получения коэффициентов матриц жесткости элементов практически не отличается от рассмотренной в главах II, III. Поэтому главное внимание должно быть уделено построению разностных аналогов дифференциальных операторов, которые являются основой в алгоритме построения матриц жесткости.

Методика построения таких операторов остается прежней. Прежде всего рассмотрим определение значений в узловых точках первых частных производных на основе зависимостей (10.9), (10.10).

В окрестности узла i разложим искомые функции φ в ряд Тейлора по направлению l

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{\Delta l}{1!}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right) + \frac{(\Delta l)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial l^2}\right) + \ldots \qquad (27.1)$$

Тогда с точностью до $(\Delta l)^2$ получим известные соотношения

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right)_i \approx \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta l}. \qquad (27.2)$$

Подставив (27.2) в (10.9), получим

$$\{e_u\} = [A]_i \{q_u\}; \quad \{e_v\} = [A]_i \{q_v\}. \qquad (27.3)$$

Система (27.3) полностью совпадает с полученной ранее (10.14). Это объясняется тем, что (27.3) отвечает линейному характеру изменения функций в пределах Δl. Этот же закон был принят при аппроксимации составляющих полного перемещения u и v в § 10.

Вторые производные, как и прежде, можно определять на основе трехузловой и четырехузловой аппроксимации, если воспользоваться выражением (27.1) и ограничиться точностью определения искомых функций до $(\Delta l)^3$.

То есть

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial l^2}\right) \cong 2\,\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{(\Delta l)^2} - \frac{2}{\Delta l}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right)_i. \qquad (27.4)$$

Применение трехузловой аппроксимации. В этом случае значения вторых частных производных e_{11} и e_{13} определяются из зависимостей (10.25) – (10.27), где коэффициенты матриц $[A]$ имеют вид:

для треугольного элемента

$$\left.\begin{aligned}
A_i^x &= 2(y_{ik}^2 + y_{ji}^2); & A_i^y &= 2(x_{ki}^2 + x_{ij}^2);\\
B_i^x &= 2x_{ki}\,y_{ji}^2; & B_i^y &= 2x_{ki}\,x_{ji}^2;\\
C_i^x &= 2y_{ji}\,y_{ik}^2; & C_i^y &= 2y_{ji}\,x_{ki}^2;\\
A_j^x &= -2y_{ik}^2; & A_j^y &= -2x_{ki}^2;\\
B_j^x &= 2x_{ji}\,y_{ki}^2; & B_j^y &= 2x_{ji}\,x_{ki}^2;\\
C_j^x &= 0; & C_j^y &= 0;\\
A_k^x &= -2y_{ji}^2; & A_k^y &= -2x_{ji}^2;\\
B_k^x &= 0; & B_k^y &= 0;\\
C_k^x &= 2y_{ki}\,y_{ji}^2; & C_k^y &= 2y_{ki}\,x_{ji}^2;
\end{aligned}\right\} \qquad (27.5)$$

для четырехугольного элемента зависимости (27.7) остаются в силе, но добавляются еще нулевые коэффициенты, поскольку число основных узловых неизвестных у четырехугольного элемента равно 12 против 9 у треугольного

$$A_l^x = 0; \quad A_l^y = 0;$$
$$B_l^x = 0; \quad B_l^y = 0;$$
$$C_l^x = 0; \quad C_l^y = 0.$$

Применение четырехузловой аппроксимации. В данном случае все зависимости остаются в силе, изменится лишь вид матрицы $[B]$:

$$[B]_i = 2\begin{bmatrix} -1 & x_{ij} & y_{ij} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & x_{ik} & y_{ik} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & x_{il} & y_{il} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (27.6)$$

Вектор узловых неизвестных в задачах изгиба жестких пластин при определении вторых частных производных от прогиба принимается в данном случае следующим:

для треугольного элемента

$$\{q\} = \{q_{3i}\,q_{4i}\,q_{5i}\;q_{3j}\;q_{4j}\;q_{5j}\;q_{3k}\,q_{4k}\,q_{5k}\}; \qquad (27.7)$$

для четырехугольного элемента

$$\{q\} = \{q_{3i}\,q_{4i}\,q_{5i}\;q_{3j}\;q_{4j}\;q_{5j}\;q_{3k}\,q_{4k}\,q_{5k}\;q_{3l}\;q_{4l}\;q_{5l}\}. \qquad (27.8)$$

Для аппроксимации смешанной производной от прогиба предлагается несколько выражений, так как можно исходить из того, что смешанная производная постоянна в окрестности узлов элемента или постоянна в пределах всего элемента, что и было принято при построении матрицы жесткости прямоугольного элемента в предыдущем параграфе.

В первом случае можно воспользоваться выражением

$$
\begin{aligned}
e_{12i} &= \frac{1}{2y_{ji}}(q_{4j} - q_{4i}) + \frac{1}{2x_{ki}}(q_{5k} - q_{5i}) + \\
&+ \frac{x_{ij}}{2y_{ji}} e_{11i} + \frac{y_{ik}}{2x_{ki}} e_{13i},
\end{aligned}
\tag{27.9}
$$

которое было приведено выше.

Тогда подставив в (27.9) зависимость (10.25), получим выражение смешанной производной e_{12} для узла i в развернутом виде

$$
e_{12i} = \lfloor F \rfloor_i \{q\}, \tag{27.10}
$$

где $\{q\}$ — вектор узловых неизвестных для элемента, определяемый по (27.7) или (27.8);

$$
\lfloor F \rfloor_i = \lfloor N_1\ N_2\ N_3\ N_4\ N_5\ N_6\ N_7\ N_8\ N_9\ N_{10}\ N_{11}\ N_{12} \rfloor
$$

– для четырехугольного элемента и

$$
\lfloor F \rfloor_i = \lfloor N_1\ N_2\ N_3\ N_4\ N_5\ N_6\ N_7\ N_8\ N_9 \rfloor
$$

– для треугольного элемента.

Коэффициенты N_i принимают здесь следующие значения:

$$
\left.
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{\delta_i}\left(y_{ji}^2 \frac{y_{ki}}{x_{ki}} + x_{ji}^2 \frac{x_{ji}}{y_{ji}}\right); \\
N_2 &= \frac{x_{ik}}{\delta_i}\left(x_{ji}^2 \frac{y_{ki}}{x_{ki}} + y_{ji}^2 \frac{x_{ji}}{y_{ji}}\right) - \frac{1}{2y_{ji}}; \\
N_3 &= \frac{y_{ij}}{\delta_i}\left(x_{ki}^2 \frac{y_{ki}}{x_{ki}} + y_{ki}^2 \frac{x_{ji}}{y_{ji}}\right) - \frac{1}{2x_{ki}}; \\
N_4 &= \frac{1}{\delta_i}\left(x_{ki}^2 \frac{y_{ki}}{x_{ki}} + y_{ki}^2 \frac{x_{ji}}{y_{ji}}\right); \\
N_5 &= \frac{x_{ji}}{\delta_i}\left(x_{ki}^2 \frac{y_{ki}}{x_{ki}}\right. \\
N_7 &= \frac{1}{\delta_i}\left(y_{ji}^2 \frac{y_{ki}}{x_{ki}} + x_{ji}\right. \\
N_9 &= \frac{y_{ik}}{\delta_i}\left(x_{ji}^2 \frac{y_{ki}}{x_{ki}} + y_{ji}^2 \frac{x_{ji}}{y_{ji}}\right) - \frac{\cdot}{2x_{ik}} \\
N_6 &= N_8 = N_{10} = N_{11} = N_{12} = 0.
\end{aligned}
\right\}
\tag{27.11}
$$

Рассмотрим другой способ, широко используемый при численном решении задач вариационно-разностным методом.

На основании теоремы Грина имеем

$$
\left.
\begin{aligned}
\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx\, dy &= \oint \varphi\, dy; \\
\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx\, dy &= -\oint \varphi\, dx.
\end{aligned}
\right\}
\tag{27.12}
$$

На основании теоремы о среднем значении в области S с границей C существует такая точка (x, y), что выполняются следующие соотношения:

$$
\left.
\begin{aligned}
\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx\, dy &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\iint_S dx\, dy; \\
\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx\, dy &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}\iint_S dx\, dy.
\end{aligned}
\right\}
\tag{27.13}
$$

В связи с тем, что $\iint_S dx\, dy = \oint_c x\, dy$, получим

$$
\frac{\partial \varphi}{\partial x}\oint_c x\, dy = \oint_c \varphi\, dy; \tag{27.14}
$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \oint_{\mathcal{C}} x\,d\,y = -\oint_{\mathcal{C}} \varphi\,d\,x. \tag{27.15}$$

Разрешая последние зависимости относительно $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$, придем к выражениям для первых частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\oint_{\mathcal{C}} \varphi\,d\,y}{\oint_{\mathcal{C}} x\,d\,y}; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\oint_{\mathcal{C}} \varphi\,d\,x}{\oint_{\mathcal{C}} x\,d\,y}. \tag{27.16}$$

Области S являются отдельными элементами и для вычисления контурных интегралов необходимо знать значения функции на границах элементов, которые можно доопределить, используя линейную интерполяцию между узлами элемента. Это позволит свести контурные интегралы к сумме произведений средних значений на соответствующие длины граней элементов.

Кроме зависимостей (27.16) на основании (27.12) – (27.13) можно получить

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_m = \frac{1}{S} \oint_{\mathcal{C}} \varphi\,d\,y; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_m = -\frac{1}{S} \oint_{\mathcal{C}} \varphi\,d\,x, \tag{27.17}$$

где S – площадь элемента.

Отождествляя φ с q_4 и q_5, получаем следующие выражения для смешанной производной в центре элемента:

для четырехугольного элемента

$$e_{12m} = \frac{1}{4S}\,[x_{kj}\,(q_{4l} - q_{4i}) + x_{ei}\,(q_{4j} - q_{4k}) +$$

$$+ y_{kj}\,(q_{5i} - q_{5l}) + y_{ei}\,(q_{5k} - q_{5j})]; \tag{27.18}$$

для треугольного элемента

$$e_{12m} = \frac{1}{3S}\,[x_{kj}\,q_{4i} + x_{ik}\,q_{4j} + x_{ji}\,q_{4k} -$$

$$- y_{kj}\,q_{5i} - y_{ik}\,q_{5j} - y_{ji}\,q_{5k}]. \tag{27.19}$$

Следует остановиться еще на одном варианте приближенной аппроксимации смешанной производной, хорошо зарекомендовавшей себя в расчетах.

Воспользуемся зависимостью

$$\left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{matrix}\right\} = [A]_i\{\varphi\}. \tag{27.20}$$

Так как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

то, полагая $\varphi \equiv \dfrac{\partial w}{\partial x}$ и $\varphi \equiv \dfrac{\partial w}{\partial y}$, получаем выражение для смешанной производной в i-й узловой точке произвольного четырехугольного элемента

$$e_{12i} = \frac{1}{2\Delta_i}\,[E]_i\,\{q\}, \tag{27.21}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Delta_i &= x_{ki}\,y_{ji} - x_{ji}\,y_{ki}; \\ [E]_i &= [\,[A]\,[B]\,[C]\,[D]\,]; \\ [A] &= [0 \quad x_{jk} \quad y_{kj}]; \\ [B] &= [0 \quad x_{ki} \quad y_{ik}]; \\ [C] &= [0 \quad x_{ij} \quad y_{ji}]; \\ [D] &= [0 \quad 0 \quad 0]; \\ \{q\} &= \{\{q\}_i \quad \{q\}_j \quad \{q\}_k \quad \{q\}_l\}. \end{aligned}\right\} \tag{27.22}$$

Для треугольного элемента выражение для смешанной производной следует из (27.21), если из него исключить матрицы $[D]$ и $\{q\}_l$.

§ 28. Построение матриц жесткости элементов пластин на основе вариационно-разностного подхода

В результате использования конечно-разностного представления производных в соответствующем функционале операции интегрирования необходимо заменить суммированием в пределах элемента, что эквивалентно принятию постоянного закона распределения производных и искомой функции в пределах части конечного элемента. Тогда, применив формулы *численного дифференцирования для искомых функций u, v, w и объединяя* слагаемые подынтегральных выражений, относящихся к одним и тем же узлам сетки, представим энергию деформации системы, приходящуюся на одну сетчатую ячейку (элемент), в виде суммы

$$\Delta Э = \Delta Э_i + \Delta Э_j + \Delta Э_k + \Delta Э_l - \Delta A. \tag{28.1}$$

Здесь суммирование выполнено для элемента четырехугольной формы.

Выполнив суммирование в пределах всей области, получим выражение для дискретного аналога функционала:

при решении плоской задачи теории упругости

$$Э = \sum_{P=1}^{M} \Delta Э = \frac{1}{2} \sum_{P=1}^{M} \frac{S_p}{R} \sum_{r=1}^{R} (D_{11}^0 e_{4r}^2 + D_{22}^0 e_{7r}^2 + 2 D_{12}^0 e_{4r} e_{7r} + D_{12}^1 (e_{5r} + e_{6r})^2 - 2 Q_{xr} u_r - 2 Q_{yr} v_r); \tag{28.2}$$

при решении задач изгиба пластин

$$Э = \sum_{P=1}^{M} \Delta Э = \frac{1}{2} \sum_{P=1}^{M} \frac{S_p}{R} \sum_{r=1}^{R} (D_{11}^1 e_{11r}^2 + 2 D_{12}^2 e_{11r} e_{13r} + D_{22}^1 e_{13}^2 r + 4 D_{12}^3 e_{12r}^2 - Q_{zr} w_r). \tag{28.3}$$

Здесь M – количество элементов области; R – количество вершин p-го элемента.

Введем в рассмотрение вектор узловых перемещений всей области

$$\{q\} = \{ \{q\}_i \ \{q\}_j \ \dots \ \{q\}_t \} , \tag{28,4}$$

где t равно общему числу узлов области; $\{q\}_r = \{q_{1r} \ q_{2r}\}$,

или $\{q\}_r = \{q_{3r} \ q_{4r} \ q_{5r}\}$ представляют собой векторы неизвестных r-го узла.

Минимизируя функционал $Э$ по всем элементам вектора $\{q\}$, получаем систему разрешающих уравнений, необходимых для решения *поставленной задачи,*

$$\frac{\partial Э}{\partial \{q\}} = \sum_{p=1}^{M} \frac{\partial Э_p}{\partial \{q\}_p} = 0. \tag{28.5}$$

Функционал $Э$ является квадратичным от переменных и их производных, поэтому из (28.5) следует, что

$$\frac{\partial Э_p}{\partial \{q\}_p} = [K]_p \{q\}_p - \{Q\}_p, \tag{28.6}$$

где $[K]_p$ – *матрица жесткости p-го конечного элемента;* $\{Q\}_p$ – вектор внешних сил, действующих на элемент.

Изложенный путь получения конечно-разностных уравнений соответствует решению краевой задачи вариационно-разностным методом. Но в отличие от общепринятой аппроксимации производных, когда приходится вводить дополнительные узлы вне контура, излагаемый здесь метод построения разностных аналогов дифференциальных операторов позволяет исключить из расчетной схемы законтурные точки.

Более того предлагаемая методика дает возможность использовать универсальный алгоритм метода конечных элементов, что значительно расширяет пределы применения вариационно-разностного метода при решении широкого круга задач.

При расчете подкрепленных пластин необходимо учитывать изгиб и плоское напряженное состояние пластины, а также растяжение (сжатие) и изгиб ребер жесткости. Матрицу жесткости подкрепленного конечного элемента, также как было показано выше, целесообразно определять как сумму матриц жесткости конечных элементов пластин.

Так как коэффициенты жесткости при плоском напряженном состоянии изолированной пластины не связаны с коэффициентами жесткости изгибного состояния, поскольку эта связь проявляется только при учете энергии деформации ребра, целесообразно строить матрицы жесткости для каждого вида напряженного состояния. Это значительно сокращает необходимые математические выкладки, упрощает процесс реализации программы и простым суммированием дает возможность получить результирующую матрицу жесткости. Кроме того, появляется возможность раздельной оценки скорости сходимости решения при том или ином напряженном состоянии.

Рассмотрим операции формирования матриц жесткости на основе вариационно-разностного подхода. В принципе можно получить матрицы жесткости треугольного и четырехугольного элементов в явном виде. Но этот путь не рационален, поскольку требует большой вычислительной работы. Поэтому изложим только особенности машинного алгоритма.

1. Построение матрицы жесткости пластины при решении плоской задачи теории упругости. А. Треугольный элемент. Матрица жесткости в этом случае строится на основе функционала (28.2).

Прежде всего необходимо составить матричные выражения для частных производных от функций u и v в узлах i, j, k. Это легко сделать с помощью канонических зависимостей (27.3). Учитывая, что полный вектор неизвестных для треугольного элемента имеет вид

$$\{q\} = \{q_{1i}\, q_{2i}\, q_{1j}\, q_{2j}\, q_{1k}\, q_{2k}\}, \tag{28.7}$$

из (27.3) следует, что

$$\left.\begin{aligned}
e_{4i} &= \frac{1}{\Delta_i}\lfloor y_{kj} \quad 0 \quad y_{ik} \quad 0 \quad y_{ji} \quad 0 \rfloor \{q\} = \\
&= \lfloor A_4 \rfloor_i \{q\};\\
e_{5i} &= \frac{1}{\Delta_i}\lfloor x_{jk} \quad 0 \quad x_{ki} \quad 0 \quad x_{ij} \quad 0 \rfloor \{q\} = \\
&= \lfloor A_5 \rfloor_i \{q\};\\
e_{6i} &= \frac{1}{\Delta_i}\lfloor 0 \quad y_{kj} \quad 0 \quad y_{ik} \quad 0 \quad y_{ji} \rfloor \{q\} = \\
&= \lfloor A_6 \rfloor_i \{q\};\\
e_{7i} &= \frac{1}{\Delta_i}\lfloor 0 \quad x_{jk} \quad 0 \quad x_{ki} \quad 0 \quad x_{ij} \rfloor \{q\} = \\
&= \lfloor A_7 \rfloor_i \{q\}.
\end{aligned}\right\} \tag{28.8}$$

С помощью правила обхода, описанного в третьей главе, легко строятся аналогичные зависимости для узлов j и k:

$$\left.\begin{aligned}
&e_{4j} = \lfloor A_4 \rfloor_j \{q\}; \qquad e_{5j} = \lfloor A_5 \rfloor_j \{q\};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&e_{4k} = \lfloor A_4 \rfloor_k \{q\}; \qquad e_{5k} = \lfloor A_5 \rfloor_k \{q\}.
\end{aligned}\right\} \tag{28.9}$$

Затем уже программно строятся одномерные массивы $\lfloor A \rfloor$, которые для примера обозначим следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&A\,4I\,(6) \equiv \lfloor A_4 \rfloor_i; \qquad A\,6I\,(6) \equiv \lfloor A_6 \rfloor_i;\\
&A\,4J\,(6) \equiv \lfloor A_4 \rfloor_j; \qquad A\,6J\,(6) \equiv \lfloor A_6 \rfloor_j;\\
&A\,4K\,(6) \equiv \lfloor A_4 \rfloor_k; \qquad A\,6K\,(6) \equiv \lfloor A_6 \rfloor_k;\\
&A\,5I\,(6) \equiv \lfloor A_5 \rfloor_i; \qquad A\,7I\,(6) \equiv \lfloor A_7 \rfloor_i;\\
&A\,5J\,(6) \equiv \lfloor A_5 \rfloor_j; \qquad A\,7J\,(6) \equiv \lfloor A_7 \rfloor_j;\\
&A\,5K\,(6) \equiv \lfloor A_5 \rfloor_k; \qquad A\,7K\,(6) \equiv \lfloor A_7 \rfloor_k.
\end{aligned}\right\} \tag{28.10}$$

В скобках указана размерность соответствующих массивов.

Как уже отмечалось ранее, все массивы в наших примерах являются одномерными. Поэтому матрицы жесткости также будут представлены одномерными массивами в виде строки жесткости.

После того как сформированы соответствующие массивы (28.10), необходимо определить жесткостные параметры $D011 \equiv D^0_{11}$, $D022 \equiv D^0_{22}$, $D112 \equiv D^1_{12}$, $D012 \equiv D^0_{12}$ и определить площадь треугольного элемента $S_{тр}$. Затем, согласно (28.2), найдем третью часть этой площади и обозначим ее как $S = S_{тр}/3$.

После подготовительных операций можно непосредственно приступить к формированию коэффициентов матрицы жесткости:

```
  N = 0
  D ϕ ␣ 1 ␣ I = 1,6
  D ϕ ␣ 1 ␣ J = I, 6
  N = N + 1
  SG (N) = SG (N) + S * (D011 * (A4I (I)*
* A4I (J) + A4J (I) * A4J (J) + A4K (I) *
* A4K (J)) + D022 * (A6I (I) * A6I (J) +
* A6J (I) * A6J (J) + A6K (I) * A6K (J) +
* D012 * (A4I (I) * A7I (J) + A4I (J) *
* A7I (I) + A4J+(I) * A7J (J) + A4J (J) *
```

```
     *  A7J(I)+A4K(I)*A7K(J)+A4K(J)*
     *  A7K(I)+D112*(A5I(I)*A5I(J)+
     *  A5J(I)*A5J(J)+A5K(I)*A5K(J)+
     *  A5I(I)*A6I(J)+A5I(J)*A6I(I)+                    (28.11)
     *  A5J(I)*A6J(J)+A5J(J)*A6J(I)+
     *  A5K(I)*A6K(J)+A5K(J)*A6K(I)+
     *  A6I(I)*A6I(J)+A6J(I)*A6J(J)+
     *  A6K(I)*A6K(J)))
   1    CØNTINUE
```

Как видно из (28.11), операции по формированию матрицы жесткости носят элементарный характер, что значительно облегчает реализацию *таких программ.*

Б. Четырехугольный элемент. В этом случае необходимо внести небольшие коррективы в алгоритм формирования матрицы жесткости, описанный выше.

Во-первых, размерность массивов $[A]$ будет равна восьми. При этом существующие массивы для i-го узла необходимо дополнить в конце каждого из них двумя нулями. Для других узлов порядок этих нулевых элементов будет определен положением начала координат в каждом конкретном случае, т. е. опять с помощью канонических выражений для i-го узла строятся аналогичные – для узлов j, k и l.

Во-вторых, цикл строится от единицы до восьми, т. е.

$$\text{D} \ \phi \sqcup 1 \sqcup \text{I} = 1{,}8; \quad \text{D} \ \phi \sqcup 1 \sqcup \text{J} = 1{,}8.$$

Площадь S равна одной четвертой площади четырехугольника. Из изложенного ясно видна простота и наглядность алгоритма, что делает его хорошо реализуемым на практике.

2. Построение матрицы жесткости изгибного элемента. В этом случае принципиально нового по сравнению с предыдущим алгоритмом нет, что объясняется универсальностью методики.

Все этапы формирования матрицы повторяют предыдущие.

1. Формируются массивы

A11, A11J, A11K,

A12I, A12J, A12K,

A13I, A13J, A13K,

A11L, A12L, A13L

Первые девять массивов используются для треугольного элемента и все массивы – для четырехугольного.

2. Определяются жесткостные характеристики и площадь элемента.

3. По аналогии с (28.11) формируется массив матрицы жесткости.

§ 29. Оценка сходимости и погрешности вариационно-разностного подхода в методе конечных элементов

Наиболее распространенным доказательством сходимости решения и оценки погрешности при том или ином разбиении области на конечные элементы является численное решение и сравнение результатов с имеющимися точными аналитическими или экспериментальными исследованиями. Воспользуемся таким доказательством и сравним порядок сходимости *решения на основе конечно-разностной аппроксимации* со сходимостью решений, полученных другими авторами, и решений, приведенных в третьей главе.

На рис. 48–55 приведены результаты решения задач изгиба пластин. Численные решения, полученные на основе вариационно-разностного подхода, обозначены цифрой *3*. Они сравниваются с результатами, приведенными в третьей главе. Обозначения кривых для соответствующих решений сохранены прежними.

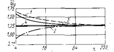


Рис. 48. Изменение относительного прогиба в центре свободно опертой квадратной пластины при различной густоте сетки n $\bar{w}_0 = w_0 \dfrac{D}{Qa^4} 10^3$.

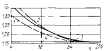


Рис. 49. Изменение относительного прогиба в центре свободно опертой квадратной пластины при действии сосредоточенной силы P $\bar{w}_0 = w_0 \dfrac{D}{Pa^2} 10^3$.

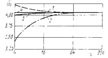


Рис. 50. Изменение относительного прогиба в центре жестко заделанной квадратной пластины при различной густоте сетки и изгибе равномерно распределенной нагрузкой $w_0 = w_0 \frac{D}{Qa^4} 10^5$

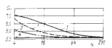


Рис. 51. Изменение относительного прогиба в центре жестко заделанной квадратной пластины при действии сосредоточенной силы P $w_0 \frac{D}{Pa^2} 10^5$.

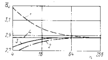


Рис. 52. Изменение относительных максимальных напряжений в центре квадратной свободно опертой пластины при изгибе нагрузкой интенсивностью Q $\bar{\sigma}_0 = \sigma \frac{10}{Qa^2}$

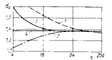


Рис. 53. Изменение относительных максимальных напряжений в центре квадратной жестко заделанной пластины при изгибе нагрузкой интенсивностью Q $\sigma_0 = \sigma \frac{10}{Qa^2}$.

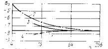


Рис. 54. Изменение относительных максимальных напряжений в защемлении квадратной жестко защемленной пластины при изгибе нагрузкой интенсивностью Q.

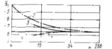


Рис. 55. Изменение относительных максимальных напряжений в защемлении квадратной жестко защемленной пластины при изгибе силой P $\sigma_0 = \sigma \frac{10}{P}$

На основании сравнительных данных можно сделать вывод, что точность решения при использовании таких матриц вполне удовлетворительная даже при крупной разбивке пластины на конечные элементы. Уменьшение размеров конечных элементов обеспечивает сходимость результатов к точному решению.

При решении задач изгиба, устойчивости и колебаний пластин и оболочек возникает вопрос о соответствии полученных разностных уравнений исходным дифференциальным уравнениям, т. е. об оценке погрешности, вносимой принятой аппроксимационной схемой. Первостепенное значение

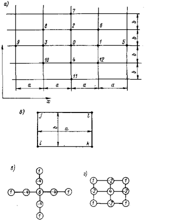


Рис. 56. К составлению уравнений равновесия в точке O МКР и МКЭ: *а* – дискретизация области; *б* – конечный элемент пластины; *в*, *г* – шаблоны для определения производных в МКР.

этот вопрос приобретает в тех случаях, когда разностные уравнения получены не путем непосредственной замены производных в дифференциальных уравнениях, а некоторым искусственным способом.

Рассмотрим дифференциальное уравнение изгиба пластины

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{Q}{D}. \qquad (29.1)$$

Заменим производные в уравнении (29.1) конечными разностями, используя регулярную прямоугольную сетку (рис. 56),

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \frac{1}{a^4}\,(q_{3,9} - 4q_{3,3} + 6q_{3,0} - 4q_{3,1} + q_{3,5});\\
\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{1}{b^4}\,(q_{3,11} - 4q_{3,4} + 6q_{3,0} - 4q_{3,2} + q_{3,7});\\
\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{1}{a^2 b^2}\,(q_{3,8} - 2q_{3,3} + q_{3,10} - 2q_{3,2} -\\
&\quad - 4q_{3,0} - 2q_{3,4} + q_{3,6} - 2q_{3,1} + q_{3,12}).
\end{aligned}\right\} \qquad (29.2)$$

Подставляя в уравнение (29.1) выражения (29.2), получаем конечноразностное уравнение равновесия в окрестности узла 0:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^4}\,(q_{3,9} - 4q_{3,3} + 6q_{3,0} - 4q_{3,1} + q_{3,5}) + \frac{1}{b^4}\,(q_{3,11} -\\
&- 4q_{3,4} + 6q_{3,0} - 4q_{3,2} + q_{3,7}) + \frac{2}{a^2 b^2}\,(q_{3,8} -\\
&- 2q_{3,3} + q_{3,10} - 2q_{3,2} - 4q_{3,0} - 2q_{3,4} - q_{3,6} -\\
&- 2q_{3,1} + q_{3,12}) = Q/D.
\end{aligned} \qquad (29.3)$$

Здесь индекс после запятой указывает на номер соответствующего узла.

Таким образом, получено уравнение, которое является каноническим для формирования системы уравнений при использовании прямоугольной

сетки в методе конечных разностей (МКР). МКР является одним из классических численных методов решения задач математической физики, приводящих к системам линейных алгебраических уравнений высокого порядка с положительно определенными матрицами и ленточной структурой. Как известно, при использовании корректной разностной аппроксимации МКР приводит к результатам, сходящимся к точному решению.

Это свойство МКР может быть использовано для оценки сходимости решений, полученных МКЭ. Для этого необходимо показать, что разрешающие уравнения, полученные по МКР и МКЭ при использовании вариационно-разностной процедуры, эквивалентны.

Запишем уравнения пластины для той же точки в другом виде, используя матрицы жесткости отдельных элементов:

$$\begin{aligned}
&([K_{ll}]_{\mathrm{I}} + [K_{kk}]_{\mathrm{II}} + [K_{jj}]_{\mathrm{III}} + [K_{ii}]_{\mathrm{IV}})\,\{q\}_0 +\\
&+ ([K_{lk}]_{\mathrm{I}} + [K_{ji}]_{\mathrm{III}})\,\{q\}_4 + ([K_{lj}]_{\mathrm{I}} + [K_{ki}]_{\mathrm{II}})\,\{q\}_3 +\\
&+ ([K_{kl}]_{\mathrm{II}} + [K_{ij}]_{\mathrm{IV}})\,\{q\}_2 + ([K_{jl}]_{\mathrm{III}} + [K_{ik}]_{\mathrm{IV}})\,\{q\}_1 +\\
&+ [K_{li}]_{\mathrm{I}}\{q\}_{10} + [K_{kj}]_{\mathrm{II}}\{q\}_8 + [K_{jk}]_{\mathrm{III}}\{q\}_{12} +\\
&+ [K_{il}]_{\mathrm{IV}}\{q\}_6 = Q_0,
\end{aligned} \qquad (29.4)$$

где $[K_{mn}]$, $m = i, j, k, l$ – матрицы размером 3 х 3, коэффициенты которых представляют обобщенные реакции в узле m по направлениям компонентов n-го вектора неизвестных; $\{q\}_r = \{q_{3r}\ q_{4r}\ q_{5r}\}$ – вектор-столбец перемещений узла r; $\{Q\}_0 = \{Q_0\ \ 0\ \ 0\}$ – вектор внешних сил, приложенных в узле 0. Здесь Q – значение приведенной узловой нагрузки.

Используя матрицу жесткости прямоугольного конечного элемента (26.7) запишем уравнение (29.4) в развернутом виде:

$$\begin{bmatrix} 4k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 4k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 4k_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{3,0} \\ q_{4,0} \\ q_{5,0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K_4 & 0 & -2k_6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2K_6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{3,4} \\ q_{4,4} \\ q_{5,4} \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 2k_7 & -2k_8 & 0 \\ 2k_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{3,3} \\ q_{4,3} \\ q_{5,3} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_4 & 0 & 2k_6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2k_6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{3,2} \\ q_{4,2} \\ q_{5,2} \end{Bmatrix} +$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+\begin{bmatrix} k_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_{3,10} \\ q_{4,10} \\ q_{5,10} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_7 & 2k_8 & 0 \\ -2k_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_{3,1} \\ q_{4,1} \\ q_{5,1} \end{Bmatrix} + \\
&+\begin{bmatrix} k_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_{3,8} \\ q_{4,8} \\ q_{5,18} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_{3,12} \\ q_{4\ 12} \\ q_{5,12} \end{Bmatrix} + \\
&+\begin{bmatrix} k_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_{3,6} \\ q_{4,6} \\ q_{5,6} \end{Bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{Bmatrix} Q_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\right\} \quad (29.5)
$$

Коэффициенты k_m определяются из зависимостей (26.8). После перемножения матриц в уравнении (29.5) получаем:

$$
\left.
\begin{aligned}
&4k_1 q_{3,10} + 2k_4 q_{3,4} - 2k_6 q_{4,4} + 2k_7 q_{3,3} - \\
&- 2k_8 q_{4,3} + 2k_4 q_{3,2} + 2k_6 q_{5,2} + k_{10} q_{3,10} + \\
&+ 2k_7 q_{3,1} + 2k_8 q_{4,1} + k_{10} q_{3,8} + k_{10} q_{3,12} + \\
&+ k_{10} q_{3,6} = \frac{Q}{D}; \\
&4k_{11} q_{4,0} + 2k_8 q_{3,10} - 2k_8 q_{3,1} = 0; \\
&4k_{13} q_{5,0} + 2k_6 q_{3,4} - 2k_6 q_{3,2} = 0.
\end{aligned}
\right\} \quad (29.6)
$$

Из решения двух последних уравнений системы (29.6) получим следующие выражения:

$$
\left.
\begin{aligned}
q_{4,0} &= \frac{k_8}{2k_{11}}\,(q_{3,1} - q_{3,3}); \\
q_{5,0} &= \frac{k_6}{2k_{13}}\,(q_{3,2} - q_{3,4}).
\end{aligned}
\right\} \quad (29.7)
$$

По аналогии с последними выражениями можно записать соотношения:

$$
\left.
\begin{aligned}
q_{4,3} &= \frac{k_8}{2k_{11}}\,(q_{1,0} - q_{3,9}); \\
q_{4,1} &= \frac{k_8}{2k_{11}}\,(q_{3,5} - q_{3,0}); \\
q_{5,2} &= \frac{k_6}{2k_{13}}\,(q_{3,7} - q_{3,0}); \\
q_{5,4} &= \frac{k_6}{2k_{13}}\,(q_{3,0} - q_{3,11}).
\end{aligned}
\right\} \quad (29.8)
$$

Подставляя (29.7), (29.8) в первое уравнение системы (29.6) и учитывая формулы (26.8), после несложных преобразований получаем:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a^4}\,(q_{3,9} - 4q_{3,3} + 6q_{3,0} - 4q_{3,1} + q_{3,5}) + \frac{1}{b^4}\,(q_{3,11} - \\
&- 4q_{3,14} - 6q_{3,0} - 4q_{3,2} + q_{3,7}) + \frac{2}{a^2 b^2}\,(q_{3,8} - 2q_{3,3} + \\
&+ q_{3,10} - 2q_{3,2} + 4q_{3,0} - 2q_{3,14} + q_{3,6} - 2q_{3,1} + \\
&+ q_{3,12}) = Q_0/D\,a\,b.
\end{aligned} \qquad (29.9)
$$

Левые части уравнений (29.9) и (29.3) совпадают и представляют собой конечно-разностное выражение левой части дифференциального уравнения изгиба пластины (29.1).

Конечно-разностное приближение для правой части уравнения (29.1) есть величина Q/D, где Q – величина интенсивности нагрузки в точке O. В излагаемой схеме расчета с использованием МКЭ сила Q_0 определяется по формуле $Q_0 = Q\,a\,b$, поэтому правая часть уравнения (29.10) также представляет конечно-разностное приближение для правой части уравнения (29.1).

К аналогичным выводам можно прийти, если уравнение равновесия формируется для узла, принадлежащего контуру пластины. Более того, при правильной прямоугольной сетке к таким же выводам приходим и в случае использования уравнений устойчивости или колебаний пластин.

Таким образом, можно заключить, что метод конечных разностей и метод конечных элементов при использовании матриц жесткости на основе разностной аппроксимации элементов функционала идентичны. А это значит, что задачи, решенные МКЭ на основе указанных матриц, обладают сходимостью такого же порядка, что и метод конечных разностей. Этим объясняются результаты сходимости решений, полученные выше. Устраняется та неопределенность в оценке сходимости, которая обычно имеется при использовании несогласованных элементов.

Так как в случае прямоугольной сетки уравнения, полученные методом конечных элементов на основе вариационно-разностного подхода, эквивалентны конечно-разностным уравнениям, то для многих характерных задач устойчивости и колебаний пластин и оболочек зависимости искомых параметров от числа узловых точек можно получить в явном виде. На этих примерах легко проверить приемлемость разностной схемы и проанализировать возможные случаи сходимости численного решения. Такая возможность появляется, если использовать метод суммарных представлений, предложенный в работах Г. Н. Положего [25]. Метод является конечно-разностным аналогом классических методов интегральных преобразований. Сущность метода заключается в нахождении решений конечно-разностных задач в явной форме или в виде достаточно простых формул, содержащих небольшое количество параметров, определяемых из такого же числа линейных алгебраических уравнений.

Оценим сходимость решений при исследовании задач устойчивости пластин.

Конечно-разностное уравнение, следующее из вариационно-разностной процедуры метода конечных элементов, имеет вид

$$\Delta_h w + \tau \nabla_h^2 w = 0. \qquad (29.10)$$

где конечно-разностный оператор

$$\Delta_h = \frac{D}{h_x^4} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & \gamma^4 & & \\ \hline & 2\gamma^2 & -4\eta\gamma^2 & 2\gamma^2 & \\ \hline 1 & -4\eta & \beta & -4\eta & 1 \\ \hline & 2\gamma^2 & -4\eta\gamma^2 & 2\gamma^2 & \\ \hline & & \gamma^4 & & \\ \hline \end{array} \qquad (29.11)$$

соответствует дифференциальному оператору

$$D\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right),$$

а оператор

$$\nabla_h^2 = \frac{1}{h_x^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \gamma^2 T_2 & \\ \hline T_1 & -2(T_1 + \gamma^2 T_2) & T_1 \\ \hline & \gamma^2 T_2 & \\ \hline \end{array} \qquad (29.12)$$

– дифференциальному оператору

$$T_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Здесь

$$\left.\begin{array}{c} T_1 = \tau p_1; \quad T_2 = \tau p_2; \\ \gamma = \dfrac{h_x}{h_y}; \quad \beta = 6(1+\gamma^4) + 8\gamma^2; \\ \eta = 1 + \gamma^2; \end{array}\right\} \qquad (29.13)$$

h_x – размер элемента в направлении оси x; h_y – размер элемента в направлении оси y.

Конечно-разностные операторы Δ_h и ∇_h^2 определены на прямоугольной сетке

$$x_i = x_0 + ih_x; \quad y_k = y_0 + kh_y,$$

$$k, i = 1, 2, \ldots$$

То значение параметра τ, при котором возможно ненулевое решение, будем называть приведенным критическим усилием рассматриваемой пластины. Истинные критические усилия T_1 и T_2 будут определяться так:

$$T_1 = \tau p_1; \quad T_2 = \tau p_2.$$

В результате применения метода суммарных представлений получим *решение системы конечно-разностных уравнений метода конечных элементов в явном виде* [4].

При условии шарнирного опирания всех кромок пластины метод суммарных представлений дает

$$T_1^* = 2\,p_1\,\frac{D}{h_x^2}\,\frac{[1-\lambda_i + \gamma^2(1-\lambda_k)\,]^2}{p_1(1-\lambda_i)+\gamma^2 p_2(1-\lambda_k)}; \qquad (29.14)$$

$$T_2^* = 2\,p_2\,\frac{D}{h_x^2}\,\frac{[1-\lambda_i + \gamma^2(1-\lambda_k)\,]^2}{p_1(1-\lambda_i)+\gamma^2 p_2(1-\lambda_k)}. \qquad (29.15)$$

Если $p_1 = p_2 = p$, то формулы (29.14), (29.15) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &T^* = T_1 = T_2 = 2\,[1-\lambda_i+\gamma^2(1-\lambda_k)]\,\frac{D}{h_x^2}, \\ &k = 1, 2, \ldots, n,\ \ i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}\right. \qquad (29.16)$$

Если пластина находится под действием контурных сил, вызывающих в ее срединной плоскости лишь усилия T_1, то полагая $p_2 = 0$, получаем

$$T^{**} = 2\,\frac{[1-\lambda_i+\gamma^2(1-\lambda_k)]^2}{(1-\lambda_i)}\,\frac{D}{h_x^2}, \qquad (29.17)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i &= \cos\frac{i\pi}{m+1}; \\ \lambda_k &= \cos\frac{k\pi}{n+1}; \end{aligned}\right\} \qquad (29.18)$$

$(m+1)$ – количество элементов в направлении оси x; $(n+1)$ – количество элементов в направлении оси y; i, k – числа полуволн в направлении осей x и y соответственно.

Если теперь устремить m и n к бесконечности, то формулы (29.14), (29.15) и (29.17) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= p_1\,\pi^2 D\,\frac{\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{b}\right)^2\right]^2}{p_1\left(\frac{i}{a}\right)^2+p_2\left(\frac{k}{b}\right)^2}; \\ T_2 &= p_2\,\pi^2 D\,\frac{\left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{b}\right)^2\right]^2}{p_1\left(\frac{i}{a}\right)^2+p_2\left(\frac{k}{b}\right)^2}; \\ T^* &= \left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{b}\right)^2\right]\pi^2 D; \\ T^{**} &= \left[\left(\frac{i}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{b}\right)^2\right]\left(\frac{a}{i}\right)^2\pi^2 D \end{aligned}\right\} \qquad (29.19)$$

и совпадают с соответствующими им точными формулами. Здесь a и b – размеры пластины в плане.

Определение абсолютной сходимости метода решает лишь одну сторону задачи. Другой является определение характера сходимости, так как оценить априорно, будет ли решение сходиться сверху или снизу, практически невозможно.

Поясним кратко решение этой задачи. Рассмотрим уравнение (29.17), которое можно после преобразований записать в виде

$$T_1 = 2\,\frac{D}{a^2}\,\frac{\left[\sin^2\frac{i\pi}{2(m+1)}+\gamma^2\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}\right]^2}{\sin^2\frac{i\pi}{2(m+1)}}. \qquad (29.20)$$

Предположим, что поперек сжатия сетка сгущена до предела $h_y \to 0$. Оценим порядок сходимости решения на основе (29.20) в зависимости от шага сетки в направлении сжатия.

Полагая $h_y \to 0$, получаем

$$T_1 = D\left(\frac{2}{h_x}\sin\frac{i\pi}{2(m+1)}+\frac{\pi^2 h_x}{2b^2\sin\frac{i\pi}{2(m+1)}}\right)^2 =$$

$$= \beta^2\,\frac{D\pi^2}{b^2}, \qquad (29.21)$$

где

$$\beta^2 = \left(\frac{2b}{\pi h_x} \sin \frac{i \pi h_x}{2a} + \frac{\pi h_x}{2b \sin \frac{i \pi h_x}{2a}} \right)^2 . \qquad (29.22)$$

При $h_x \to 0$ выражение (29.22) стремится к точному решению

$$\beta_0^2 = \left(\frac{ib}{a} + \frac{a}{bi} \right)^2 . \qquad (29.23)$$

Разложение (29.22) в ряд по $i \pi h_x / 2a$ приводит к выражению

$$\beta^2 = \beta_0^2 - \frac{\pi^2 h_x^2}{12 b^2} \left(\frac{i^4 b^4}{a^4} - 1 \right) + \frac{\pi^4 h_x^4}{b^4} \frac{b^4 i^4}{480 a^4} \times$$
$$\times \left(\frac{b^2 i^2}{a^2} + \frac{5 a^2}{3 b^2 i^2} + \frac{2}{3} \right) + \ldots + \delta (h_x^6). \qquad (29.24)$$

и совпадает с зависимостью, приведенной в [20].

Второе слагаемое в этом разложении представляет собой главную часть погрешности приближенного решения, и, следовательно, знак этой погрешности будет определять характер сходимости решения (29.21). При $i > a/b$ второе слагаемое будет отрицательным, и решение при $h_x \to 0$ будет стремиться к точному монотонно снизу. При $i < a/b$ – монотонно сверху. В связи с тем, что наименьшие значения параметра критической нагрузки получаются при следующих i:

$$i = 1 \qquad 0 < a/b < \sqrt{2} ;$$
$$i = 2 \qquad \sqrt{2} < a/b < \sqrt{6};$$
$$i = 3 \qquad \sqrt{6} < a/b < \sqrt{12} ,$$

. . . .

то при численном решении задачи для этого случая будем иметь: сходимость снизу

$$\sqrt{i\,(i-1)} < a/b < i ; \qquad (29.25)$$

сходимость сверху

$$i < a/b < \sqrt{i\,(i-1)}.$$

Рассмотрим теперь вариант, когда $h_x \to 0$, т. е. сетка сгущена до предела в направлении сжатия. Тогда

$$T_1 = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left[\frac{ib}{a} + 4 \frac{b\,a}{i \pi^2 h_y^2} \sin^2 \frac{\pi h_y}{2b} \right]^2 =$$
$$= \beta^2 \frac{\pi^2 D}{b^2} .$$

Разлагая в ряд по степеням аргумента $\dfrac{\pi h_y}{2b}$, получаем

$$\beta^2 = \beta_0^2 - \frac{\pi^2 h_y^2}{24 a^2} \left(\frac{a^3}{i b^3} \right) + \delta (h^4) . \qquad (29.26)$$

В этом случае наблюдается сходимость снизу. Рассматривая конечное отношение размеров сетки, можно заключить, что знак погрешности и ее величина будут определяться в зависимости от отношения $\dfrac{h_x}{h_y}$ и соотношений (29.25).

Аналогично можно оценить сходимость решения при исследовании колебаний пластин. Разностное уравнение колебаний для прямоугольной пластины имеет вид

$$\Delta_h \, w + \tau \nabla_h^2 \, w + 2 \mu w = 0, \qquad (29.27)$$

где $2\mu = \lambda^2 \rho$; ρ – плотность единицы площади пластины; λ – частота собственных колебаний, подлежащая определению.

В результате применения метода суммарных представлений получим решение системы конечно-разностных уравнений [24]

$$\lambda^2 = \lambda_{ki}^2 = 4 \frac{D}{\rho h_x^4} \left[(1-\lambda_i)^2 + 2\gamma^2 (1-\lambda_i)(1-\lambda_k) + \right.$$
$$\left. + (1-\lambda_k)^2 \right] - \frac{2\tau}{\rho h_x^4} \left[p_1 (1-\lambda_i) + \gamma^2 p_2 (1-\lambda_k) \right], \qquad (29.28)$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots, n$; $i = 1, 2, 3, \ldots, m$.

В случае, когда $h_x \to 0$, формула (29.28) принимает вид

$$\lambda_0^2 = \lambda_{0ki}^2 = D \frac{\pi^2}{\rho} \left[\left(\frac{k}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{ki}{a\,b} \right)^4 + \left(\frac{i}{b} \right)^4 - \frac{\tau}{D} p_1 \left(\frac{k}{a} \right)^2 - \frac{\tau}{D} p_2 \left(\frac{i}{b} \right)^2 \right] \tag{29.29}$$

и совпадает с точной известной формулой.

При $\tau = 0$ получим

$$\lambda_{ki}^2 = 4 \frac{D}{\rho h_x^4} [(1-\lambda_i)^2 + 2\gamma^2 (1-\lambda_i)(1-\lambda_k) + (1-\lambda_k)^2].$$

Для этого случая решается неравенство [20]

$$|\lambda^2 - \lambda_0^2| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{3} \frac{\pi^6 D h_x^2}{\rho} \left[\left(\frac{k}{a} \right)^6 + \left(\frac{k}{a} \right)^4 \left(\frac{i}{b} \right)^2 + \left(\frac{k}{a} \right)^2 \left(\frac{i}{b} \right)^4 + \left(\frac{i}{b} \right)^6 \right],$$

которое определяет оценку квадрата приближенной собственной частоты λ^2 пластины по отношению к квадрату точной частоты λ_0^2.

§ 30. К исследованию поведения подкрепленных пластин на основе вариационно-разностного подхода в схеме метода конечных элементов

Алгоритм формирования матрицы жесткости подкрепленного элемента в рассматриваемом случае не отличается от алгоритма, изложенного в третьей главе. Но применение разностной аппроксимации еще более упрощает все промежуточные выкладки и, в частности, формирование матрицы жесткости подкрепляющего элемента.

Введем в рассмотрение полный вектор узловых перемещений для элемента ребра

$$\{q\}_p = \{q_{1r}\ q_{2r}\ q_{3r}\ q_{4r}\ q_{5r}\ q_{1s}\ q_{2s}\ q_{3s}\ q_{4s}\ q_{5s}\}. \tag{30.1}$$

Потенциальная энергия ребра с учетом взаимодействия с конечным элементом пластины определяется выражением (7.13).

Для узловой точки r ребра можем написать:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial l^2} \right)_r &= \frac{2}{l_p^2} (q_{3s} - q_{3r} - x_{sr}\, q_{4r} - y_{sr}\, q_{5r}); \\ \left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_r &= \frac{1}{l_p^2} (x_{sr}\, q_{1s} - x_{sr}\, q_{1r} + y_{sr}\, q_{2s} - y_{sr}\, q_{2r}), \end{aligned}\right\} \tag{30.2}$$

где $l_p = \sqrt{x_{sr}^2 + y_{sr}^2}$ – длина элемента ребра.

Заменив операцию интегрирования суммированием в выражении (7.13), а также используя соотношения (30.2), можно получить дискретное выражение потенциальной энергии деформации подкрепляющего элемента.

Варьируя V_p по всем элементам вектора $\{q\}_p$, получим искомую матрицу жесткости конечного элемента ребра жесткости в составе пластины (рис. 57). Коэффициенты этой матрицы равны

$$\left.\begin{aligned} &k_1 = x_{sr}^2; \quad k_2 = y_{sr}^2; \quad k_3 = 4 \frac{J}{F}; \\ &k_4 = 2 x_{sr}^2 \frac{J}{F}; \quad k_5 = 2 y_{sr}^2 \frac{J}{F}; \quad k_6 = x_{sr}\, y_{sr}; \\ &k_7 = -\eta x_{sr}^2; \quad k_8 = -\eta x_{sr}\, y_{sr}; \quad k_9 = -\eta y_{sr}^2; \\ &k_{10} = 2 x_{sr} \frac{J}{F}; \quad k_{11} = 2 y_{sr} \frac{J}{F}; \quad k_{12} = 2 x_{sr}\, y_{sr} \frac{J}{F}. \end{aligned}\right\} \tag{30.3}$$

Дальнейший алгоритм формирования полной матрицы жесткости отвечает той схеме, которая была изложена в третьей главе.

Приведенные ниже результаты решения некоторых задач наглядно свидетельствуют о достаточно хорошей сходимости полученных результатов.

В качестве одной из тестовых задач, позволяющей оценить как правомерность описанного выше подхода к исследованию подкрепленных пластинчатых конструкций, так и точность решений, даваемых методом конечных элементов, рассматривается изгиб ребристой плиты, которая изображена на рис. 58. Ниже приводится сравнение решения задачи по предлагаемому алгоритму с решениями, полученными в работах [2, 7, 8], при следующих граничных условиях:

$$x = 0 \;\text{ и }\; x = 6\,\text{м}; \quad u = v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$y = 0 \;\text{ и }\; y = 6\,\text{м}; \quad u = v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

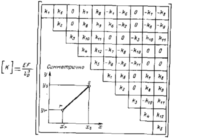


Рис. 57. Макет матрицы жесткости ребра.

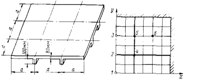


Рис. 58. Общий вид и расчетная схема подкрепленной пластины a = 200 см.

Таблица 11. **Прогибы пластины, подкрепленной ребрами жесткости**

Номера узловых точек	Источники			Решение по предлагаемым методикам			
	[2]	[7]	[8]	(МКЭ)		(ВРМ)	
	Размер сетки						
	6 x 6	6 x 6	6 x 6	6 x 6	9 x 9	6 x 6	9 x 9
1	10,896	10,599	10,689	11,003	11,036	11,210	11,134
2	9,054	8,902	8,974	9,121	9,189	9,172	9,209
3	5,964	5,708	5,738	5,882	5,883	6,120	5,993
4	7,852	7,726	7,783	7,903	7,961	7,943	7,977
5	4,567	4,494	4,556	4,577	4,620	4,605	4,628
6	3,585	3,391	3,399	3,534	3,519	3,747	3,617

Плита загружалась равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью Q. Коэффициент Пуассона $\nu = \frac{1}{6}$. В силу симметрии рассматривалась четвертая часть пластины.

В табл. 11 приведены прогибы пластины в точках *1, 2, 3, 4, 5, 6,* увеличенные в k раз, где $k = \left(\frac{E}{q}\right) 10^{-5}$.

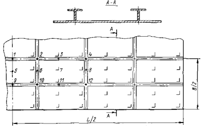


Рис. 59. Схема расположения розеток датчиков и установки индикаторов часового типа.

Таблица 12. Прогибы подкрепленной пластины. Сосредоточенная нагрузка, вариант 1.

Точки замеров	Эксперимент	МКЭ. Число конечных элементов			
		14	56	126	174
1	3,98	4,56	4,26	4,23	4,21
2	–	4,19	3,89	3,86	3,84
3	2,80	3,04	2,84	2,82	2,81
4	1,71	1,73	1,64	1,63	1,63
5	3,60	–	3,85	–	3,78
6	3,35	–	3,52	–	3,46
7	2,52	–	2,59	–	2,54
8	1,70	–	1,51	–	1,49
9	2,73	2,98	2,85	2,83	2,83
10	2,60	2,74	2,61	2,61	2,59
11	2,07	2,04	1,94	1,93	1,93
12	1,52	1,21	1,15	1,15	1,15

Как видно из результатов, представленных в последней таблице, при одинаковых граничных условиях расхождение максимальных прогибов в решениях по МКЭ с использованием рассмотренных матриц жесткости и по сравнению с решениями других авторов составляет от 1 до 6%. Таким образом, полученные результаты хорошо согласуются с данными других авторов, что позволяет сделать вывод о том, что такой подход может успешно применяться для расчета пластин, подкрепленных ребрами жесткости.

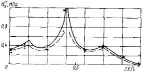


Рис. 60. Распределение цепных напряжений по длине пластины (вариант 2).

——— – МКЭ, сечение $y = \frac{1}{24}$ B; – – – – МКЭ, сечение $y = \frac{1}{8}$ B; +, ● – эксперимент.

Таблица 13. Прогибы подкрепленной пластины. Сосредоточенная нагрузка, вариант 2.

Точки замеров	Эксперимент	МКЭ. Число конечных элементов			
		14	56	126	174
1	1,36	1,51	1,42	1,41	1,39
2	1,72	1,73	1,78	1,76	1,75
3	2,27	2,38	2,41	2,39	2,37
4	–	2,79	2,85	2,82	2,82
5	1,27	–	1,32	1,30	–
6	1,61	–	1,51	1,49	–
7	2,13	–	2,00	2,09	–
8	2,39	–	2,29	2,22	–
9	1,02	1,10	1,04	1,02	1,02
10	1,23	1,21	1,15	1,15	1,15
11	1,75	1,56	1,49	1,47	1,47
12	1,95	1,77	1,68	1,66	1,65

На данном этапе развития теории конечно-разностных схем для задачи о напряженно-деформированном состоянии подкрепленных пластин не представляется возможным в общем виде теоретически исследовать сходимость и точность метода конечных элементов. Это обстоятельство, однако, не должно служить препятствием при внедрении численных расчетов таких сложных систем. Поэтому представляется целесообразным

Рис. 61. Распределение цепных напряжений по длине пластины (вариант 1).

——— – МКЭ, сечение $y = \frac{1}{24}$ B; – – – – МКЭ, сечение $y = \frac{1}{8}$ B; +, ○ – эксперимент.

произвести сравнение численного решения МКЭ с экспериментальными данными, полученными для модели, расчетная схема которой приведена на рис. 59. Поперечная нагрузка в виде сосредоточенных сил $P = 98$ Н прикладывалась в двух точках подкрепленной пластины, находящихся на оси x на равном расстоянии по обе стороны от центра. В одном случае $x = x_A = \pm L/14$, в другом — $x = x_B = \pm 3L/14$.

В силу симметрии условий закрепления и действия приложенной нагрузки рассчитывалась четвертая часть пластины.

В табл. 12 и 13 и на рис. 60, 61 представлены результаты численных исследований напряжений и прогибов (в миллиметрах) в различных точках пластины и дано сравнение с результатами экспериментальных данных. Анализ проведенных теоретических и экспериментальных исследований позволяет сделать вывод, что увеличение числа конечных элементов обеспечивает сходимость численных результатов к экспериментальным данным. Различие между расчетными значениями перемещений, полученными при дискретизации пластины 174 конечными элементами, и экспериментальными данными не превышает 5%.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абовский Н. П., Гетц И. И.** Пологие оболочки, подкрепленные ребрами, произвольной ориентации. Учебное пособие, ч. 2. Красноярск, Изд-во Красноярского политехн. ин-та, 1973.

2. **Абовский Н. П., Енджиевский Л. В.** Расчет ребристых плит методом сеток. – Пространственные конструкции, 1966, т. 2, с. 168–187.

3. **Аргирос Дж.** Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. М., Стройиздат, 1968.

4. **Бублик Б. Н.** Численное решение задач динамики пластин и оболочек. Киев, изд-во КГУ, 1969.

5. **Вайнберг Д. В., Сахаров А. С., Синявский А. Л.** Исследование гибких пластин и оболочек. – В кн.: Расчет пространственных конструкций. Киев, изд-во Киевского инж.-строит. ин-та, 1971, вып. 14, с. 35–51.

6. ***Варвак П. М.*** *Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок.* Некоторые задачи прикладной теории упругости в конечных разностях. Киев, изд-во АН УССР, ч. 1, 1949, ч.2, 1952.

7. **Вилипыльд Ю. К.** Расчет ребристых плит методом конечных элементов. – Труды Таллинского политехн. ин-та, 1970, вып. 297, с. 17–29.

8. **Гирин С. Н.** Расчет прочности пластин при изгибе. – Труды ГИВТа, 1979, ч. 1, № 164, с. 46–48.

9. **Годунов С. К., Рябенький В. С.** Разностные схемы. – М., Наука, 1977.

10. **Городецкий А. С.** Численная реализация метода конечных элементов. – В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев, Будевельник, 1973, с. 31–42.

11. **Джонсон, Маклей.** Сходимость метода конечных элементов в теории упругости. – Прикладная механика. Сер. Е, 1968, № 2, с. 68–72.

12. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ. М., Мир, 1975.

13. **Кан С. Н.** Прочность, устойчивость и несущая способность конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек. – Расчет пространственных конструкций, 1963, вып. 8, с. 85–106.

14. **Квитка А. Л., Ворошко П. П., Бобрицкая С. Д.** Напряженно-деформированное состояние тел вращения. Киев, Наукова думка, 1977.

15. **Козляков В. В.** Упруго-пластический изгиб судовых перекрытий и балок из упрочняющегося материала с учетом деформаций сдвига. – Труды НТО Судпрома, 1962, № 42, с. 51–94.

16. **Конкин В. С.** Расчет пластин, подкрепленных ребрами. – Труды ГИВТа, 1975, вып. 144, с. 101–146.

17. **Корнеев В. Г.** Сопоставление метода конечных элементов с вариационно-разностным методом решения задач теории упругости. – Известия ВНИИГ, 1967, № 83, с. 287–307.

18. **Кочанов Ю. П.** Об использовании законтурных точек при решении краевых задач конечно-разностными методами. – Труды НКИ, 1969, вып. 151, с. 12–18.

19. **Курдюмов А. А.** К вопросу о расчете перекрытий, подкрепленных несколькими перекрестными связями. – Труды ЛКИ, 1955, вып. 15, с. 12–25.

20. **Липовцев Ю. В.** Аналитическое решение разностных уравнений устойчивости. – Механика твердого тела, 1972, № 1, с. 77–81.

21. **Локшин А. З.** К расчету пластинок, подкрепленных жесткими ребрами. – Прикладная механика, 1935, т. 2, вып. 2, с. 225–240.

22. **Назаров А. А.** Основы теории и методы расчета пологих оболочек. Л.–М., изд-во лит-ры по строительству, 1966.

23. **Новожилов В. В.** Основы нелинейной теории упругости. Л., Гостехиздат, 1948.

24. **Папкович П. Ф.** Труды по строительной механике корабля, т. 2, Л., Судпромгиз, 1962.

25. **Положий Г. Н.** Численное решение двумерных и трехмерных задач математической физики и функции дискретного аргумента. Киев, изд-во КГУ, 1962.

26. **Постнов В. А.** Исследование изгиба судового перекрытия как ортотропной пластины с учетом сдвига. – Труды НТО Судпрома, 1962, № 42, с. 143–155.

27. **Постнов В. А.** Численные методы расчета судовых конструкций. Л., Судостроение, 1977.

28. **Постнов В. А., Фрумен А. И.** Применение метода конечных элементов для расчета оболочек произвольной формы. – Труды ЛКИ (Прочность судовых конструкций), 1978, с. 73–82.

29. ***Постнов В. А., Хархурим И. Я.*** *Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций.* Л., Судостроение, 1974.

30. **Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ**, т. 1, 2. Л., Судостроение, 1976.

31. **Розин Л. А.** Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов. Л., Энергия, 1971.

32. **Ростовцев Г. Г.** Расчет тонкой плоской обшивки, подкрепленной ребрами жесткости. – Труды ЛИВТа, 1970, вып. 20, с. 3–109.

33. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов. Пер. с англ. М., Мир, 1979.

34. **Соколов Н. Г.** К расчету пластин, опертых на ребра. – Сопротивление материалов и теория сооружений, 1965, вы. 3, с. 50–62.

35. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1963.

36. Clough R. W. The finite element in plane stress analysis. – Proc. 2-nd ASCE Conf. on Electronic Computation. Pittsburgh, 1960, Sept.

37. Courant R., Friedrichs K., Zewy H. Über die partiellen differenzengleich – unden der mathematischen physik. – Math. Ann., 1928, 100, p. 32–74.

38. *Courant R. Variational methods for the solution of problems* of equlibrinm and vibrations. – Bulletin of American mathematical society, 1943, Vol. 9, № 1, p. 47–64.

39. Donald E., Jonson. A Difference – based Variational Method For Schells. – Solids and structures, 1970, Vol. 6, № 6, p. 699–724.

40. Hrennikoff A. Solution of problems of clasticity by the frame work method. – Journal of applied Mechanics, 1941, Vol 8, Dec., p. 169– 175.

41. Turner H. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp Z. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. – Jornal of the Aeronaut., 1956, Vol 23, Sept. p. 805–823.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Константин Павлович Горбачев

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
В РАСЧЕТАХ ПРОЧНОСТИ

Редактор Н. П. Саяпина
Художественный редактор О. П. Андреев
Технический редактор И. Ю. Байкова
Корректоры С. Н. Маковская, В. Ю. Самохина
Оформление художника Б. Н. Осенчакова

ИБ № 1035

Подписано в печать 22.03.85. М-30508. Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,06. Усл. кр.-отт. 9,19. Уч.-изд. л. 8,6. Тираж 3000 экз. Изд. № 3899-83. Заказ 213 Цена 45 коп.

Издательство „Судостроение". 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8.

Тульская типография Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Тула, пр. Ленина, 109.